JCGM 101:2008

Vrednovanje mjernih podataka – Dopuna 1. *Uputama za iskazivanje mjerne nesigurnosti* – Prijenos razdioba uporabom metode monte karlo

DRŽAVNI ZAVOD ZA
MJERITELJSTVO

Vrednovanje mjernih podataka – Dopuna 1. *Uputama za iskazivanje mjerne nesigurnosti* – Prijenos razdioba uporabom metode monte karlo

JCGM 101:2008

Vrednovanje mjernih podataka – Dopuna 1. *Uputama za iskazivanje mjerne nesigurnosti* – Prijenos razdioba uporabom metode monte karlo

DRŽAVNI ZAVOD ZA MJERITELJSTVO

Prijevod 1. izdanja iz 2008.

NASLOV IZVORNIKA:

Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement" – Propagation of distributions using Monte Carlo method

Évaluation des données de mesure – Supplément 1 du "Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure" – Propagation de distributions par une méthode de Monte Carlo

NAKLADNIK: *Državni zavod za mjeriteljstvo* • ZA IZDAVAČA: *Mirko Vuković* • PREVEO S ENGLESKOG JEZIKA: *Mirko Vuković* • LEKTORIRAO: *dr. Luka Vukojević* • KORIGIRAO: *Domagoj Škarica* • PRIPREMA SLOGA: *LASERplus d.o.o, Zagreb, Mirela Mikić Muha* • *Zagreb, travnja 2009.*

ISBN: 978-953-6783-09-0

Sadržaj

Dodatci

Predgovor

Godine 1997. sedam međunarodnih organizacija koje su 1993. priredile izvornu verziju *Uputa za iskazivanje mjerne nesigurnosti* (GUM-a) i *Međunarodnog rječnika osnovnih i općih naziva u mjeriteljstvu* (VIM) osnovalo je Zajednički odbor za upute u mjeriteljstvu (JCGM) kojemu je predsjedavao ravnatelj Međunarodnog ureda za utege i mjere (BIPM-a). JCGM je preuzeo odgovornost za te dvije skupine dokumenata od tehničke savjetodavne skupine 4 ISO-a (TAG 4).

Zajednički je odbor osnovao BIPM s Međunarodnim elektrotehničkim povjerenstvom (IEC), Međunarodnim savezom za kliničku kemiju i laboratorijsku medicinu (IFCC), Međunarodnom suradnjom na akreditaciji (ILAC), Međunarodnom organizacijom za normizaciju (ISO), Međunarodnom unijom za čistu i primijenjenu kemiju (IUPAC), Međunarodnom unijom za čistu i primijenjenu fiziku (IUPAP) i Međunarodnom organizacijom za zakonsko mjeriteljstvo (OIML).

JCGM ima dvije radne skupine. Zadaća je radne skupine 1, *Izražavanje mjerne nesigurnosti*, promicanje uporabe GUM-a i priprema dopune za njegovu širu primjenu. Radna skupina 2, *Radna skupina o Međunarodnom rječniku osnovnih i općih naziva u mjeriteljstvu* (VIM), ima zadaću prerađivati i promicati uporabu VIM-a. Za dodatne podatke o aktivnostima JCGM-a vidi mrežnu stranicu www.bipm.org.

Svrha je dopuna poput ove dati dodanu vrijednost GUM-u osiguravanjem uputa o aspektima određivanja nesigurnosti koji se ne obrađuju eksplicitno u GUM-u. Te će upute međutim biti u najvećoj mogućoj mjeri usklađene s općim vjerojatnosnim temeljem GUM-a.

Prikazanu dopunu 1. GUM-a priredila je radna skupina JCGM-a i imala je korist od podrobnih pregleda koje su poduzele organizacije članovi JCGM i nacionalni mjeriteljski instituti.

Uvod

Ova dopuna *Uputama za iskazivanje mjerne nesigurnosti* (GUM) bavi se pojmom prijenosa (rasprostiranja) razdioba vjerojatnosti preko matematičkog modela mjerenja [GUM:1995, 3.1.6] kao temelja za određivanje vrijednosti nesigurnosti i njezinu primjenu metodom simulacije monte karlo. Taj se postupak primjenjuje na model koji ima bilo koji broj ulaznih veličina i jednu izlaznu veličinu.

Opisana metoda monte karlo praktična je alternativa okviru nesigurnosti GUM-a [GUM:1995, 3.4.8]. Ona ima posebnu vrijednost kad:

a) linearizacija modela ne osigurava prikladan prikaz ili

b) kad funkcija gustoće vjerojatnosti (PDF) za izlaznu veličinu znatno odstupa od Gaussove razdiobe ili normalizirane i neusredištene *t*-razdiobe, npr. zbog vidljive asimetrije.

U slučaju (a) procjena izlazne veličine i pridružena standardna nesigurnost koja je dana okvirom nesigurnosti GUM-a može biti nepouzdana. U slučaju (b) rezultat bi mogli biti nerealni intervali pokrivanja (poopćenje "povećane nesigurnosti" u okviru nesigurnosti GUM-a).

GUM [GUM:1995 3.4.8] "… osigurava okvir za ocjenu nesigurnosti …" koji se temelji na uporabi zakona prijenosa nesigurnosti [GUM:1995, 5] i opisu izlazne veličine Gaussovom razdiobom ili normaliziranom ili neusredištenom *t*-razdiobom [GUM:1995, G.6.2, G.6.4]. U tome okviru zakon prijenosa nesigurnosti omogućuje prijenos nesigurnosti preko toga modela. Njime se posebno određuje standardna nesigurnost pridružena procjeni izlazne veličine na temelju danih

1) najboljih procjena ulaznih veličina,
2) standardnih nesigurnosti pridruženih tim procjenama i gdje je to prikladno
3) broja stupnjeva slobode pridružena tim standardnim nesigurnostima te
4) svih neništičnih kovarijancija pridruženih parovima tih procjena.

U tome se okviru također funkcija gustoće vjerojatnosti, za koju se uzima da opisuje izlaznu veličinu, upotrebljava za dobivanje intervala pokrivanja s dogovorenim vjerojatnostima pokrivanja za tu veličinu.

Najbolje procjene, standardne nesigurnosti, kovarijancije i brojevi stupnjeva slobode u sažetu obliku prikazuju dostupne podatke koji se odnose na ulazne veličine. Tim pristupom koji se ovdje razmatra dostupni se podatci kodiraju u funkcije gustoće vjerojatnosti ulaznih veličina. U tome se pristupu radi s tim funkcijama gustoće vjerojatnosti kako bi se odredila funkcija gustoće vjerojatnosti izlazne veličine.

Uzimajući u obzir da okvir nesigurnosti GUM-a ima neka ograničenja, prijenos razdioba uvijek će dati funkciju gustoće vjerojatnosti izlazne veličine koja je u skladu s funkcijama gustoće vjerojatnosti ulaznih veličina. Ta funkcija gustoće vjerojatnosti izlazne veličine opisuje znanje o toj veličini koje se temelji na znanju o ulaznim veličinama kako su opisane njima dodijeljenim funkcijama gustoće vjerojatnosti. Kad je jednom dostupna funkcija gustoće vjerojatnosti izlazne veličine, ta se veličina može prikazati u sažetu obliku njezinim očekivanjem, za koje se uzima da je jednako procjeni veličine, i njezinim standardnim odstupanjem za koje se uzima da je jednako standardnoj nesigurnosti pridruženoj toj procjeni. Nadalje, funkcija gustoće vjerojatnosti može se upotrebljavati za dobivanje intervala pokrivanja koji odgovara dogovorenoj vjerojatnosti pokrivanja za izlaznu veličinu.

Uporaba funkcija gustoće vjerojatnosti kako je opisana u ovoj dopuni općenito je sukladna sa zamislima na kojima se temelji GUM. Funkcija gustoće vjerojatnosti koje veličine izražava stupanj znanja o toj veličini, tj. kvantificira stupanj vjerovanja o vrijednostima koje se mogu dodijeliti veličini na temelju raspoloživih podataka. Ti se podatci obično sastoje od sirovih statističkih podataka, mjernih rezultata ili drugih znanstvenih izještaja, ili se temelji na profesionalnoj prosudbi.

Da bi se odredila funkcija gustoće vjerojatnosti vrijednosti koje veličine na temelju niza pokazivanja, može se primijeniti Bayesov teorem [27, 33]. Kad su dostupni prikladni podatci koji se odnose na sustavna djelovanja za dodjelu odgovarajuće funkcije gustoće vjerojatnosti [51, 56] može se primijeniti načelo najveće entropije.

Prijenos razdioba ima širu primjenu nego okvir nesigurnosti GUM-a. U njegovoj se primjeni upotrebljava veći sadržaj informacije od onoga koji nose najbolje procjene i pridružene standardne nesigurnosti (i, kad je to prikladno, brojevi stupnjeva slobode i kovarijancije).

U dodatku A dana je povijesna perspektiva.

NAPOMENA 1.: Navodi u obliku [GUM:1995, 3.1.6] označuju (pod)točke GUM-a.

NAPOMENA 2.: GUM osigurava pristup kad linearizacija nije prikladna [GUM:1995, 5.1.2 napomena]. Taj pristup ima ograničenja: upotrebljavaju se samo vodeći nelinearni članovi razvoja u Taylorov red modela, a funkcija gustoće vjerojatnosti za ulazne veličine smatra se Gaussovom.

NAPOMENA 3.: Strogo govoreći, u GUM-u se varijabla $(Y - y)/u(y)$ opisuje t-razdiobom, pri čemu je Y izlazna veličina, y procjena izlazne veličine Y, a $u(y)$ standardna nesigurnost pridružena procjeni y [GUM:1995, G.3.1]. Taj se opis također upotrebljava u ovoj dopuni. (GUM se u stvari odnosi na varijablu $(y - Y)/u(y)$).

NAPOMENA 4.: Funkcija gustoće vjerojatnosti ne smatra se gustoćom frekvencija.

NAPOMENA 5.: "Određivanje nesigurnosti nije rutinski ni čisto matematički zadatak; ono ovisi o iscrpnome znanju naravi mjerene veličine te upotrijebljene mjerne metode i mjernoga postupka. Kakvoća i korisnost navedene nesigurnosti za rezultat mjerenja prema tomu u krajnjoj mjeri ovisi o razumijevanju, kritičkoj analizi i poštenju onoga tko doprinosi dodjeljivanju njezine vrijednosti." [17]

Vrednovanje mjernih podataka – Dopuna 1. *Uputama za iskazivanje mjerne nesigurnosti* – Prijenos razdioba uporabom metode monte karlo

1 Područje primjene

Ova *dopuna* daje opći numerički postupak za provedbu izračuna u skladu sa širim načelima GUM-a [GUM:1995, G.1.5] koji se zahtijevaju za određivanje vrijednosti mjerne nesigurnosti. Taj se postupak primjenjuje na navoljne modele koji imaju jednu izlaznu veličinu kad su ulazne veličine opisane bilo kakvim specificiranim funkcijama gustoće vjerojatnosti [GUM:1995, G.1.4, G.5.3].

Kao i GUM ova se dopuna prvenstveno bavi izražavanjem mjerne nesigurnosti dobro definirane fizikalne veličine (mjerene veličine) koja se može opisati u biti jedinstvenom vrijednošću [GUM:1995, 1.2].

Ova *dopuna* daje upute za određivanje vrijednosti mjerne nesigurnosti u situacijama kad nisu ispunjeni ili kad nije jasno jesu li ispunjeni uvjeti za okvir nesigurnosti GUM-a [GUM:1995, G.6.6]. Ona se također može upotrebljavati u okolnostima kad postoje poteškoće u primjeni okvira nesigurnosti GUM-a, naprimjer zbog složenosti modela. Ove upute dane su u obliku prikladnu za primjenu računala.

Ova se *dopuna* posebno može upotrebljavati za dobivanje (prikaza) funkcije gustoće vjerojatnosti izlazne veličine iz koje se mogu dobiti:

a) procjena izlazne veličine

b) standardna nesigurnost pridružena toj procjeni i

c) interval pokrivanja za tu veličinu koji odgovara specificiranoj vjerojatnosti pokrivanja.

Za dani (i) model koji povezuje ulazne veličine s izlaznom veličinom i za dane (ii) funkcije gustoće vjerojatnosti koje opisuju ulazne veličine postoji jedinstvena funkcija gustoće vjerojatnosti izlazne veličine. Općenito se ta funkcija gustoće vjerojatnosti ne može odrediti analitički. Prema tomu cilj je pristupa opisana u ovome tekstu odrediti a), b) i c) kako su opisani u prethodnome stavku s propisanim brojčanim dopuštenim odstupanjima bez nekvantificiranih aproksimacija.

Za propisanu vjerojatnost pokrivanja ova se dopuna može upotrebljavati za dobivanje bilo kojega zahtijevanog intervala pokrivanja, uključujući vjerojatnosno simetričan interval pokrivanja i najkraći interval pokrivanja.

Ova se dopuna primjenjuje na neovisne ulazne veličine, pri čemu je svakoj takvoj veličini dodijeljena odgovarajuća funkcija gustoće vjerojatnosti, ili na neneovisne veličine, tj. kad je nekim od tih veličina ili svim tim veličinama dodijeljena zajednička funkcija gustoće vjerojatnosti.

Tipični problemi određivanja nesigurnosti na koje se može primjenjivati ova *dopuna* obuhvaćaju:

– probleme u kojima doprinosi nesigurnosti pridruženi procjeni vrijednosti izlazne veličine nisu nužno usporedivi po veličini [GUM:1995, G.2.2]

– probleme u kojima je teško ili nezgodno dobiti parcijalne derivacije modela, koje su potrebne prema zakonu prijenosa nesigurnosti [GUM:1995, 5]

– probleme u kojima funkcija gustoće vjerojatnosti izlazne veličine nije Gaussova ili normalizirana i neusredištena *t*-razdioba [GUM:1995, G.6.5]

– probleme u kojima su procjena vrijednosti izlazne veličine i pridružena standardna nesigurnost usporedive po veličini [GUM:1995, G.2.1]

– probleme u kojima modeli imaju navoljnu složenost [GUM:1995, G.1.5] i

– probleme u kojima se za vrijednosti ulaznih veličina pojavljuju asimetrične funkcije gustoće vjerojatnosti [GUM:1995, G.5.3].

Za provjeru primjenjivosti okvira nesigurnosti GUM-a predviđen je postupak validacije. Okvir nesigurnosti GUM-a ostaje glavni pristup u fazi izračuna vrijednosti nesigurnosti u okolnostima u kojima je dokazivo primjenjiv.

Obično je mjernu nesigurnost u izvještaju dostatno dati s jednom ili možda dvije važne desetične znamenke. Dane su računske upute kako bi se dobila prihvatljiva sigurnost da su u okviru danih informacija te desetične znamenke ispravne.

Dani su podrobni primjeri za ilustraciju uputa.

Ovaj je dokument *dopuna* GUM-u i upotrebljava se zajedno s njim. Alternativno se mogu upotrebljavati i drugi pristupi koji su općenito sukladni s GUM-om. Ovu dopunu upotrebljavaju isti korisnici kao i GUM.

NAPOMENA 1.: Ova dopuna ne razmatra modele koji ne definiraju izlaznu veličinu na jedinstven način (npr. koji uključuju rješenje kvadratne jednadžbe bez specifikacije koji korijen treba uzeti).

NAPOMENA 2.: Ova dopuna ne razmatra slučaj gdje je dostupna apriorna funkcija gustoće vjerojatnosti za izlaznu veličinu, ali se obradba može prilagoditi da obuhvaća taj slučaj [16].

2 Upućivanja na normativne dokumente

Sljedeći normativni dokumenti neizbježni su za primjenu ovoga dokumenta.

JCGM 100 (GUM:1995), *Upute za iskazivanje mjerne nesigurnosti (GUM)*, 1995.

JCGM 200 (VIM:2008), *Međunarodni mjeriteljski rječnik – Osnovni i opći pojmovi i pridruženi nazivi,* VIM, 3. izdanje, 2008.

3 Nazivi i definicije

Za potrebe ove dopune primjenjuju se definicije iz GUM-a i *Međunarodnog rječnika osnovnih i općih naziva u mjeriteljstvu (VIM),* osim ako se ne kaže drukčije. U nastavku se daju neke od najvažnijih definicija iz tih dokumenata koje su, gdje je to potrebno, prilagođene (vidi podtočku 4.2). Dane su dodatne definicije, uključujući i definicije uzete ili prilagođene iz drugih izvora koje su posebno važne za ovu dopunu.

Popis glavnih znakova dan je u dodatku G.

3.1
razdioba vjerojatnosti

<slučajne varijable> funkcija koja daje vjerojatnost da će slučajna varijabla poprimiti bilo koju danu vrijednost ili da će pripasti određenomu skupu vrijednosti

NAPOMENA: Vjerojatnost slučajne varijable na cijelom skupu vrijednosti jednaka je 1.

[prilagođeno iz norme ISO 3534-1:1993, 1.3; GUM:1995, C.2.3]

NAPOMENA 1: Razdioba vjerojatnosti naziva se jednodimenzijskom kad se odnosi na jednu (skalarnu) slučajnu varijablu i višedimenzijskom kad se odnosi na vektorske slučajne varijable. Višedimenzijska razdioba vjerojatnosti također se opisuje kao zajednička razdioba.

NAPOMENA 2: Razdioba vjerojatnosti može poprimiti oblik funkcije razdiobe ili funkcije gustoće vjerojatnosti.

3.2
funkcija razdiobe

funkcija koja za svaku vrijednost ξ daje vjerojatnost da je slučajna varijabla X manja od ili jednaka ξ:

$$G_X(\xi) = \Pr(X \le \xi)$$

[prilagođeno iz norme ISO 3534-1:1993, 1.4; GUM:1995, C.2.4)]

3.3
funkcija gustoće vjerojatnosti

derivacija (kad postoji) funkcije razdiobe:

$$g_X(\xi) = \mathrm{d}G_X(\xi)/\mathrm{d}\xi$$

NAPOMENA: $g_X(\xi)\mathrm{d}\xi$ je "elementarna vjerojatnost":

$$g_X(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \Pr(\xi < X < \xi + \mathrm{d}\xi)$$

[prilagođeno iz norme ISO 3534-1:1993, 1.5; GUM:1995, C.2.5]

3.4
normalna razdioba

razdioba vjerojatnosti neprekinute slučajne varijable X čija je funkcija gustoće vjerojatnosti jednaka:

$$g_X(\xi) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

za $-\infty < \xi < +\infty$.

NAPOMENA: Parametar μ je očekivanje, a σ standardno odstupanje varijable X.

[prilagođeno iz norme ISO 3534-1:1993, 1.37; GUM:1995, C.2.14]

NAPOMENA: Normalna razdioba također se naziva i Gaussovom razdiobom.

3.5
t-razdioba

razdioba vjerojatnosti neprekinute slučajne varijable X čija je funkcija gustoće vjerojatnosti jednaka:

$$g_X(\xi) = \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{\sqrt{\pi\nu}\,\Gamma(\nu/2)}\left(1+\frac{\xi^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}$$

za $-\infty < \xi < +\infty$ s parametrom ν, pozitivnim cijelim brojem, brojem stupnjeva slobode razdiobe, gdje je

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t, \qquad z > 0$$

gama-funkcija

3.6
očekivanje

svojstvo slučajne varijable koje je za neprekidnu slučajnu veličinu X opisanu funkcijom gustoće vjerojatnosti $g_X(\xi)$ dano izrazom:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi g_X(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

NAPOMENA 1.: Nemaju sve slučajne varijable očekivanje.

NAPOMENA 2.: Očekivanje slučajne varijable $Z = F(X)$ za danu funkciju $F(X)$ jednako je:

$$E(Z) = E(F(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) g_X(\xi)\, \mathrm{d}\xi.$$

3.7
varijancija

svojstvo slučajne varijable koje je za neprekidnu slučajnu varijablu X opisanu funkcijom gustoće vjerojatnosti $g_X(\xi)$ dano izrazom

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [\xi - E(X)]^2 g_X(\xi)\, \mathrm{d}\xi$$

NAPOMENA: Nemaju sve slučajne varijable varijanciju.

3.8
standardno odstupanje

pozitivni drugi korijen $[V(X)]^{1/2}$ varijancije

3.9
moment reda *r*

očekivanje r-te potencije slučajne varijable, tj.:

$$E(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^r g_X(\xi)\, \mathrm{d}\xi$$

NAPOMENA 1.: Središnji moment reda r očekivanje je slučajne varijable $Z = [X - E(X)]^r$.

NAPOMENA 2.: Očekivanje slučajne varijable $E(X)$ prvi je moment. Varijancija $V(X)$ središnji je moment 2. reda.

3.10
kovarijancija

svojstvo para slučajnih varijabla koje je za dvije neprekidne slučajne varijable X_1 i X_2 opisane zajedničkom (višedimenzijskom) funkcijom razdiobe vjerojatnosti $g_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\xi})$, gdje su $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)^\top$ i $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)^\top$, dani izrazom:

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [\xi_1 - E(X_1)]\,[\xi_2 - E(X_2)] g_x(\boldsymbol{\xi}) \mathrm{d}\xi_1 \mathrm{d}\xi_2$$

NAPOMENA: Nemaju svi parovi slučajnih varijabla kovarijancije.

3.11
matrica nesigurnosti

matrica dimenzija $N \times N$ koja sadržava na dijagonali kvadrate standardnih nesigurnosti pridruženih procjenama sastavnica N-dimenzijske vektorske veličine i izvandijagonalnim položajima kovarijancija pridruženih parovima procjena

NAPOMENA 1.: Matrica nesigurnosti $\boldsymbol{U_x}$ dimenzija $N \times N$ pridružena vektorskoj procjeni $\boldsymbol{x}$ vektorske veličine $\boldsymbol{X}$ ima prikaz

$$\boldsymbol{U_x} = \begin{bmatrix} u(x_1, x_1) & \cdots & u(x_1, x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u(x_N, x_1) & \cdots & u(x_N, x_N) \end{bmatrix},$$

gdje su $u(x_i, x_i) = u^2(x_i)$ varijancije (kvadrati standardne nesigurnosti) pridružene procjeni x_i, a $u(x_i, x_j)$ kovarijancija je pridružena procjenama x_i i x_j. Kad su elementi X_i i X_j veličine $\boldsymbol{X}$ nekorelirani, kovarijancija $u(x_i, x_j) = 0$.

NAPOMENA 2.: Kovarijancije se također nazivaju uzajamnim nesigurnostima.

NAPOMENA 3.: Matrica nesigurnosti također se naziva matricom kovarijancije ili matricom varijancija-kovarijancija.

3.12
interval pokrivanja

interval koji sadržava vrijednost veličine s utvrđenom vjerojatnošću koja se temelji na dostupnim podatcima

NAPOMENA 1.: Interval pokrivanja katkad se naziva intervalom pouzdanosti ili Bayesovim intervalom.

NAPOMENA 2.: Općenito postoji više intervala pokrivanja za danu vjerojatnost.

NAPOMENA 3.: Interval pokrivanja ne treba nazivati "intervalom povjerenja" kako bi se izbjeglo brkanje s odgovarajućim statističkim pojmom [GUM:1995, 6.2.2].

NAPOMENA 4.: Ta se definicija razlikuje od definicije dane u 3. izdanju VIM-a (2007) jer se iz razloga danih u GUM-u [GUM:1995, E.5] u ovoj dopuni nije upotrebljavao naziv "istinita vrijednost".

3.13
vjerojatnost pokrivanja

vjerojatnost da se vrijednost veličine nalazi u specificiranome intervalu pokrivanja

NAPOMENA: Vjerojatnost pokrivanja katkad se naziva "razinom povjerenja" [GUM:1995, 6.2.2].

3.14
duljina intervala pokrivanja

najveća manje najmanja vrijednost u intervalu pokrivanja

3.15
vjerojatnosno simetrični interval pokrivanja

interval pokrivanja za koju veličinu takav da je vjerojatnost da je veličina manja od najmanje vrijednosti u intervalu jednaka vjerojatnosti da je veličina veća od najveće vrijednosti u tome intervalu

3.16
najkraći interval pokrivanja

interval pokrivanja za koju veličinu s najkraćom duljinom između svih intervala pokrivanja za tu veličinu koji imaju istu vjerojatnost pokrivanja

3.17
prijenos razdioba

metoda koja se upotrebljava za određivanje razdiobe vjerojatnosti izlazne veličine iz razdioba vjerojatnosti pridruženih ulaznim veličinama o kojima ovise izlazne veličine

NAPOMENA: Ta metoda može biti analitička ili numerička, točna ili približna.

3.18
okvir nesigurnosti GUM-a

primjena zakona prijenosa nesigurnosti i opis izlazne veličine Gaussovom razdiobom ili normaliziranom i neusredištenom *t*-razdiobom kako bi se dobio interval pokrivanja

3.19
metoda monte karlo

metoda prijenosa razdioba provedbom slučajnog uzorkovanja iz razdioba vjerojatnosti

3.20
brojčano dopušteno odstupanje

poluširina najužeg intervala koji sadržava sve brojeve koji se mogu točno izraziti specificiranim brojem važnih desetičnih znamenaka

PRIMJER: Svi brojevi veći od 1,75 i manji od 1,85 mogu se izraziti dvjema važnim desetičnim znamenkama kao 1,8. Brojčano dopušteno odstupanje jednako je (1,85 – 1,75)/2 = 0,05.

NAPOMENA: Za izračun brojčanoga dopuštenog odstupanja pridružena brojčanoj vrijednosti vidi podtočku 7.9.2.

4 Dogovori i zapisi

Za potrebe ove dopune prihvaćeni su sljedeći dogovori i zapisi.

4.1 Matematički model mjerenja [GUM:1995, 4.1] s jednom (skalarnom) veličinom može se izraziti funkcionalnim odnosom f:

$$Y = f(\boldsymbol{X}) \tag{1}$$

gdje je Y skalarna izlazna veličina, a $\boldsymbol{X}$ predstavlja N ulaznih veličina $(X_1, \ldots, X_N)^\top$. Svaka ulazna veličina X_i smatra se slučajnom varijablom s mogućim vrijednostima ξ_i i očekivanjem x_i. Izlazna veličina Y slučajna je varijabla s mogućim vrijednostima η i očekivanjem y.

NAPOMENA 1.: Isti se znak upotrebljava za fizikalnu veličinu i slučajnu varijablu koja predstavlja tu veličinu (vidi [GUM: 1995, 4.1.1, napomenu 1]).

NAPOMENA 2.: Većina modela mjerenja može se izraziti u obliku (1). Općenitiji je oblik

$$h(Y, \boldsymbol{X}) = 0$$

koji implicitno povezuje $\boldsymbol{X}$ i Y. U svakomu slučaju za primjenu metode monte karlo nužno je samo da se Y može formirati tako da odgovara svakoj smislenoj varijabli $\boldsymbol{X}$.

4.2 U ovoj se dopuni odstupilo od znakova koji se često upotrebljavaju za funkcije gustoće vjerojatnosti i funkcije razdiobe [24]. GUM upotrebljava generički znak f za model i funkciju gustoće vjerojatnosti. Kao posljedica takve uporabe dolazi do manjih zabuna u GUM-u. Drukčija je situacija u ovoj dopuni. Pojmovi modela, funkcije gustoće vjerojatnosti i funkcije razdiobe najvažniji su za praćenje i primjenu danih uputa. Prema tomu, umjesto znakova f i F za označivanje funkcije gustoće vjerojatnosti i funkcije razdiobe redom se upotrebljavaju znakovi g i G. Ti se znakovi na odgovarajući način indeksiraju kako bi se označila veličina na koju se odnose. Znak f rezerviran je za model.

NAPOMENA: Tomu su prilagođene definicije u točki 3 koje se odnose na funkcije gustoće vjerojatnosti i razdiobe.

4.3 U ovoj dopuni funkcija gustoće vjerojatnosti dodjeljuje se veličini koja može biti pojedinačna skalarna veličina X ili vektorska veličina $\boldsymbol{X}$. U skalarnomu slučaju funkcija gustoće vjerojatnosti veličine X označuje se s $g_X(\xi)$, gdje je ξ varijabla koja opisuje moguće vrijednosti veličine X. Veličina X smatra se slučajnom varijablom s očekivanjem $E(X)$ i varijancijom $V(X)$ (podtočke 3.6, 3.7).

4.4 U vektorskomu slučaju funkcija gustoće vjerojatnosti vektorske veličine $\boldsymbol{X}$ označuje se s $g_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\xi})$ gdje je $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_N)^\top$ vektorska varijabla koja opisuje moguće vrijednosti vektorske veličine $\boldsymbol{X}$. Ta se varijabla $\boldsymbol{X}$ smatra slučajnom varijablom s (vektorskim) očekivanjem $E(\boldsymbol{X})$ i kovarijancijskom matricom $V(\boldsymbol{X})$.

4.5 Funkcija gustoće vjerojatnosti za više ulaznih veličina često se naziva zajedničkom čak i ako su sve ulazne veličine neovisne.

4.6 Kad su elementi X_i iz vektorske ulazne veličine $\boldsymbol{X}$ neovisni, funkcija gustoće vjerojatnosti veličine X_i označuje se s $g_{X_i}(\xi_i)$.

4.7 Funkcija gustoće vjerojatnosti izlazne veličine Y označuje se oznakom $g_Y(\eta)$, a funkcija razdiobe izlazne veličine Y oznakom $G_Y(\eta)$.

4.8 U korpusu ove dopune veličina se označuje velikim slovom, a očekivanje veličine ili procjena veličine odgovarajućim malim slovom. Naprimjer, očekivanje ili procjena veličine Y označivalo bi se slovom y. Takav je zapis uglavnom neprikladan za fizikalne veličine zbog utvrđene uporabe posebnih znakova, npr. znaka T za temperaturu i znaka t za vrijeme. Prema tomu u nekim se primjerima (točka 9) upotrebljavaju drukčiji zapisi. Tu se veličina označuje njezinim dogovornim znakom, a njezino očekivanje ili procjena tim znakom s oznakom $\hat{}$ iznad znaka. Naprimjer, veličina koja prikazuje odstupanje duljine granične mjerke koja se umjerava od nazivne duljine (vidi podtočku 9.5) označuje se s δL, a procjena veličine δL znakom $\widehat{\delta L}$.

NAPOMENA: Znak s crticom općenito se upotrebljava u statističkoj literaturi za označivanje procjene.

4.9 U ovoj se dopuni naziv "zakon prijenosa nesigurnosti" primjenjuje na uporabu aproksimacije modela članovima prvog reda razvoja u Taylorov red. Taj se naziv na odgovarajući način pobliže opisuje kad se upotrebljava aproksimacija članovima višeg reda.

4.10 Indeks "c" [GUM:1995, 5.1.1] za sastavljenu standardnu nesigurnost suvišan je u ovoj dopuni. Standardna nesigurnost pridružena procjeni y vrijednosti izlazne veličine Y može se prema tomu napisati jednostavno kao $u(y)$, ali uporaba oznake $u_c(y)$ i dalje je prihvatljiva ako je korisno istaknuti činjenicu da ona predstavlja sastavljenu standardnu nesigurnost. Kvalifikator "sastavljena" u tomu kontekstu također se smatra suvišnim i može se izostaviti: postojanje "y" u "$u(y)$" već pokazuje procjenu vrijednosti izlazne veličine kojoj je pridružena standardna nesigurnost. Osim toga kad rezultati jednog ili više određivanja nesigurnosti postaju ulazni podatci u iduća određivanja nesigurnosti, uporaba donjeg indeksa "c" i kvalifikatora "sastavljena" bila bi neprikladna.

4.11 U ovoj dopuni upotrebljavaju se nazivi "interval pokrivanja" i "vjerojatnost pokrivanja". GUM upotrebljava naziv "razina povjerenja (level of confidence)" kao sinonim za vjerojatnost pokrivanja, povlačeći razliku između engleskih izraza "level od confidence" i "confidence level" [GUM:1995, 6.2.2] jer posljednje ima posebnu definiciju u statistici. Budući da se ta dva naziva na neke jezike prevode s engleskog jezika istim izrazima, ovdje se izbjegava njihova uporaba.

4.12 U skladu s 10. zaključkom 22. CGPM-a (2003) "… znak za desetičnu oznaku mora biti točka ili zarez na liniji …". JCGM je odlučio prihvatiti u svojim dokumentima na engleskom točku na liniji.*

4.13 Ako nije drukčije određeno, brojevi se izražavaju tako da označuju broj važnih desetičnih znamenaka.

PRIMJER: Brojevi 0,060, 0,60, 6,0 i 60 izražavaju se dvjema važnim desetičnim znamenkama. Brojevi 0,06, 0,6, 6 i 6×10^1 izražavaju se jednom važnom desetičnom znamenkom. Bilo bi neispravno 6×10^1 izražavati kao 60 jer bi to podrazumijevalo dvije važne znamenke.

4.14 Neki znakovi imaju više značenja u ovoj dopuni. Vidi dodatak G. Njihova je uporaba jasna iz konteksta.

4.15 U ovoj se dopuni upotrebljavaju sljedeće kratice:

CGPM	Conférence Générale des Poids et Mesures
IEEE	Institute of Electrical and Electronic Engineers
GUF	GUM uncertainty framework
JCGM	Joint Committee for Guides in Metrology
GUM	Guide to the expression of uncertainty in measurement
MCM	Monte Carlo method**
PDF	probability density function**
VIM	International vocabulary of basic and general terms in metrology

5 Temeljna načela

5.1 Glavne faze određivanja nesigurnosti

5.1.1 Glavne faze određivanja nesigurnosti čine: formuliranje, prijenos i prikaz u sažetu obliku:

a) *U fazi formuliranja*:
   1) određuje se izlazna veličina Y, veličina koja se namjerava mjeriti (mjerena veličina)
   2) određuju se ulazne veličine $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_N)^\top$ o kojima ovisi Y
   3) razvija se model koji povezuje Y i $\boldsymbol{X}$
   4) na temelju dostupnog znanja ulaznim se veličinama X_i dodjeljuju funkcije gustoće vjerojatnosti, Gaussova (normalna), pravokutna (jednolična) itd. Međutim onim veličinama X_i koje nisu neovisne dodjeljuje se zajednička funkcija gustoće vjerojatnosti;

* U ovom prijevodu u skladu s hrvatskom praksom kao desetični znak upotrebljava se zarez. (napomena prevoditelja)

** Ove se dvije kratice ne upotrebljavaju u hrvatskome prijevodu ovoga dokumenta osim na slikama i u tablicama. (napomena prevoditelja)

b) *U fazi prijenosa*
provodi se prijenos funkcija gustoće vjerojatnosti slučajnih veličina X_i kroz model kako bi se dobila funkcija gustoće vjerojatnosti slučajne veličine Y

c) *U fazi prikazivanja u sažetu obliku*
funkcija gustoće vjerojatnosti izlazne veličine Y upotrebljava se za dobivanje
   1) očekivanja izlazne veličine Y koje se smatra procjenom y te veličine
   2) standardnog odstupanja izlazne veličine Y koje se smatra standardnom nesigurnošću $u(y)$ pridruženoj procjeni y [GUM:1995, E.3.2]
   3) intervala pokrivanja koji sadržava izlaznu veličinu Y sa specificiranom vjerojatnošću (vjerojatnošću pokrivanja).

NAPOMENA 1.: Očekivanje ne mora biti prikladno za sve primjene (vidi [GUM:1995, 4.1.4]).

NAPOMENA 2.: Veličine opisane nekim razdiobama, kao što su Cauchyjeva razdioba, nemaju očekivanja ili standardna odstupanja. Međutim uvijek se može odrediti interval pokrivanja za izlaznu veličinu.

5.1.2 Okvir nesigurnosti GUM-a ne odnosi se eksplicitno za dodjelu funkcija gustoća vjerojatnosti ulaznim veličinama. Međutim [GUM:1995, 3.3.5], "…standardne nesigurnosti A-vrste dobivaju se iz funkcije gustoće vjerojatnosti … izvedene iz razdiobe opaženih čestoća … dok se standardne nesigurnosti B-vrste dobivaju iz pretpostavljene funkcije gustoće vjerojatnosti koja se temelji na stupnju vjerovanja da će se pojaviti neki događaj …. Oba pristupa upotrebljavaju priznata tumačenja vjerojatnosti.«

NAPOMENA: Uporaba razdioba vjerojatnosti u određivanju nesigurnosti B-vrste svojstvo je Bayesovskoga statističkog zaključivanja [21, 27]. Još uvijek se istražuju [22] granice valjanosti za dodjelu broja stupnjeva slobode standardnoj nesigurnosti na temelju Welch-Satterthwaiteove formule.

5.1.3 Korake u fazi formulacije provodi mjeritelj, možda uz pomoć specijaliziranog stručnjaka. U ovoj se dopuni daju upute za dodjelu funkcije gustoće vjerojatnosti (korak 4) iz faze a) iz podtočke 5.1.1) za neke opće slučajeve (vidi podtočku 6.4). Za faze prijenosa i prikazivanja u sažetu obliku b) i c) za koje se u ovome tekstu daju podrobne upute zahtijevaju se dodatni mjeriteljski podatci te se načelno za problem specificiran u fazi formulacije mogu provesti s bilo kojim zahtijevanim dopuštenim brojčanim odstupanjem.

NAPOMENA: Kad se jednom provede faza formulacije a) iz podtočke 5.1.1, funkcija gustoće vjerojatnosti izlazne veličine potpuno je matematički specificirana, ali se općenito za izračun očekivanja, standardnog odstupanja i intervala pokrivanja zahtijevaju numeričke metode koje uključuju određeni stupanj aproksimacije.

5.2 Prijenos razdioba

U ovoj se dopuni općenito razmatra djelotvoran pristup za određivanje (numeričku aproksimaciju) funkcije razdiobe izlazne veličine Y:

$$G_Y(\eta) = \int_{-\infty}^{\eta} g_Y(z)\mathrm{d}z$$

On se temelji na primjeni metode monte karlo (MCM) pri provedbi prijenosa razdioba (vidi podtočku 5.9).

NAPOMENA: Formalna je definicija [9] funkcije gustoće vjerojatnosti izlazne veličine Y:

$$g_Y(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} g_X(\xi)\, \delta(\eta - f(\xi))\, \mathrm{d}\xi_N \dots \mathrm{d}\xi_1$$

gdje $\delta(\cdot)$ označuje Diracovu delta-funkciju. Taj višestruki integral ne može se općenito izračunati analitički. Za dobivanje aproksimacije funkcije gustoće vjerojatnosti $g_Y(\eta)$ mogu se primjenjivati pravila numeričke integracije, ali to nije djelotvoran pristup.

5.3 Dobivanje prikaza podataka u sažetu obliku

5.3.1 Procjena y izlazne veličine Y jednaka je očekivanju $E(Y)$. Standardna nesigurnost $u(y)$ pridružena procjeni y dana je standardnim očekivanjem izlazne veličine Y, pozitivnim drugim korijenom varijancije $V(Y)$ izlazne veličine Y.

5.3.2 Interval pokrivanja za veličinu Y može se odrediti iz funkcije razdiobe $G_Y(\eta)$. Neka α označuje bilo koju vrijednost između ništice i $1 - p$, gdje je p zahtijevana vjerojatnost pokrivanja. Krajnje točke intervala pokrivanja s razinom pokrivanja od 100p % za izlaznu veličinu Y jednake su $G_Y^{-1}(\alpha)$ i $G_Y^{-1}(p+\alpha)$, tj. α- i $(p+\alpha)$-kvantilima funkcije razdiobe $G_Y(\eta)$.

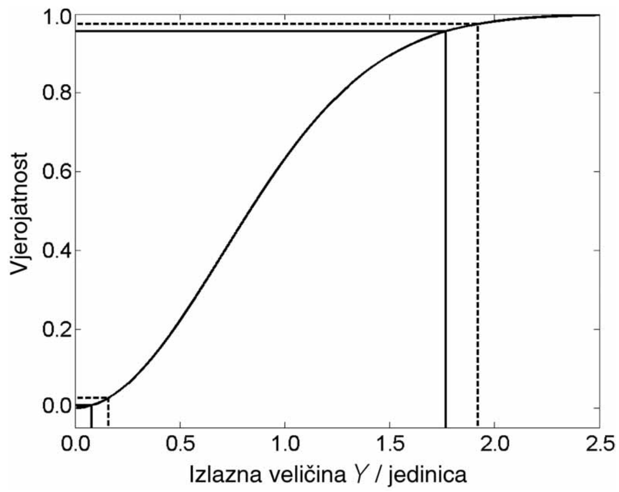
5.3.3 Odabirom vrijednosti $\alpha = (1-p)/2$ dobiva se vjerojatnosno simetričan interval pokrivanja s razinom pokrivanja od 100p % definiran kvantilima $(1-p)/2$ i $(1+p)/2$.

NAPOMENA: Za simetričnu funkciju gustoće vjerojatnosti vrijednosti izlazne veličine Y dobiveni bi interval pokrivanja bio istovjetan $y \pm U_p$, gdje je povećana nesigurnost U_p [GUM:1995, 2.3.5] dana umnoškom standardne nesigurnosti i faktora pokrivanja koji odgovara toj funkciji gustoće vjerojatnosti. Ta funkcija gustoće vjerojatnosti općenito nije poznata u analitičkome obliku.

5.3.4 Za asimetrične funkcije gustoće vjerojatnosti može biti prikladnija brojčana vrijednost vjerojatnosti α različita od $(1-p)/2$. U tom se slučaju može upotrebljavati najkraći interval pokrivanja s razinom pokrivanja od 100p %. On ima to svojstvo da za unimodalnu funkciju gustoće vjerojatnosti (funkciju gustoće vjerojatnosti s jednom vršnom vrijednošću) sadržava mod, najvjerojatniju vrijednost izlazne veličine Y. On je dan brojčanom vrijednošću vjerojatnosti α koja zadovoljava jednadžbu $g_Y(G_Y^{-1}(\alpha)) = g_Y(G_Y^{-1}(p+\alpha))$, ako je $g_Y(\eta)$ unimodalna funkcija gustoće vjerojatnosti, i općenito brojčanom vrijednošću vjerojatnosti α koja je takva da razlika $G_Y^{-1}(p+\alpha) - G_Y^{-1}(\alpha)$ ima minimalnu vrijednost.

5.3.5 Za simetrične funkcije gustoće vjerojatnosti, kao što su Gaussova i normalizirana i neusredištena t-razdioba koje se upotrebljavaju u okviru nesigurnosti GUM-a vjerojatnosno simetričan interval pokrivanja s razinom pokrivanja od 100p % istovjetan je najkraćemu intervalu pokrivanja s razinom pokrivanja od 100p %. Prema tomu usporedbom okvira nesigurnosti GUM-a s drugim pristupima može se upotrebljavati bilo koji od tih intervala.

5.3.6 Slika 1. prikazuje funkciju razdiobe $G_Y(\eta)$ koja odgovara asimetričnoj funkciji gustoće vjerojatnosti. Isprekidane okomite crte označuju krajnje točke vjerojatnosno simetrična intervala pokrivanja s razinom pokrivanja od 95 %, a isprekidane vodoravne crte odgovarajuće točke (na osi) vjerojatnosti, odnosno 0,025 i 0,975. Neprekidne crte označuju krajnje točke najkraćeg intervala pokrivanja s razinom pokrivanja od 95 % i odgovarajuće točke vjerojatnosti koje su u tom slučaju jednake 0,006 i 0,956. Duljine intervala pokrivanja s razinom pokrivanja od 95 % u ta su dva slučaja redom jednake 1,76 jedinica i 1,69 jedinica.



Slika 1.: Funkcija razdiobe $G_Y(\eta)$ koja odgovara asimetričnoj funkciji gustoće vjerojatnosti i vjerojatnosno simetričnu i najkraćem od intervala pokrivanja s razinom pokrivanja od 95 % (podtočka 5.3.6). "Jedinica" označuje bilo koju jedinicu

5.4 Provedba prijenosa razdioba

5.4.1 Prijenos razdioba može se provesti na nekoliko načina:

a) analitičkim metodama, tj. metodama koje daju matematički prikaz funkcije gustoće vjerojatnosti izlazne veličine Y

b) prijenosom nesigurnosti koji se temelji na zamjeni modela aproksimacijom članovima prvog reda razvoja u Taylorov red [GUM:1995, 5.1.2] – zakon prijenosa nesigurnosti

c) kao b) osim što su u aproksimaciju razvojem u Taylorov red [GUM:1995, 5.1.2 napomena] uključeni doprinosi izvedeni iz članova višeg reda

d) numeričkim metodama [GUM:1995, G.1.5] koje se primjenjuju za prijenos razdioba, posebno uporabom metode monte karlo (vidi podtočku 5.9).

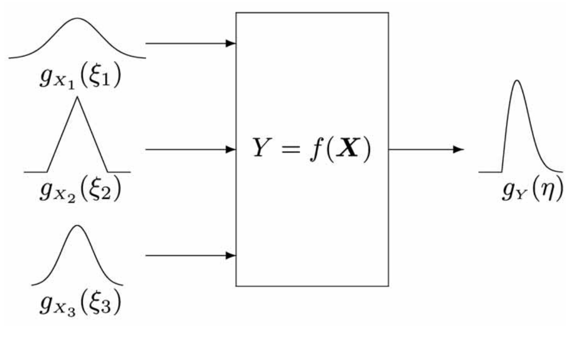
NAPOMENA 1.: Analitičke su metode idealne jer ne unose nikakve aproksimacije. One su međutim primjenjive samo u jednostavnim slučajevima. Način postupanja i primjeri dani su u [8, 13]. Te se metode dalje ne razmatraju u ovoj *dopuni*, osim u primjerima (točka 9) radi usporedbe.

NAPOMENA 2.: Metoda monte karlo razmatra se u ovome tekstu kao sredstvo za numerički prikaz razdiobe izlazne veličine, a ne kao metoda simulacije sama po sebi. U kontekstu faze prijenosa određivanja nesigurnosti rješava se deterministički problem, ne simulira se nikakav slučajni fizikalni proces.

5.4.2 GUM [GUM:1995, G.1.5] dopušta uporabu metoda različitih od okvira nesigurnosti GUM-a. Taj se pristup zagovara u ovoj *dopuni* koja se općenito temelji na prijenosu razdioba. Za linearne ili linearizirane modele te za ulazne veličine s Gaussovim funkcijama gustoće vjerojatnosti taj pristup dovodi do rezultata koji je sukladan s okvirom nesigurnosti GUM-a. Ali u slučajevima gdje nisu zadovoljeni uvjeti za primjenu okvira nesigurnosti GUM-a (podtočke 5.7 i 5.8), može se općenito očekivati da će pristup iz ove dopune dovesti do ispravnog iskaza nesigurnosti.

5.4.3 Za fazu prijenosa treba odabrati odgovarajuću metodu. Taj se pristup može upotrebljavati ako se može dokazati da uvjeti koji su nužni za okvir nesigurnosti GUM-a daju valjane rezultate. Ako postoje naznake da okvir nesigurnosti GUM-a vjerojatno neće biti valjan, treba primjenjivati drugi pristup. Može se pojaviti treća situacija u kojoj je teško ocijeniti hoće li okvir nesigurnosti GUM-a biti valjan. U svim tim slučajevima metoda monte karlo daje praktičnu (alternativnu) metodu. U prvome slučaju katkad može biti lakše upotrebljavati metodu monte karlo zbog poteškoća u izračunu koeficijenata osjetljivosti, npr. [GUM:1995, 5.1.3]. U drugome slučaju općenito se može očekivati da će metoda monte karlo dati valjane rezultate jer se ne pretpostavljaju nikakve aproksimacije. U trećemu se metoda monte karlo može primijeniti za određivanje rezultata izravno ili za ocjenu kakvoće rezultata koji su dobiveni okvirom nesigurnosti GUM-a.

5.4.4 Prijenos funkcija gustoće vjerojatnosti $g_{X_i}(\xi_i)$, $i = 1, ..., N$ ulaznih veličina X_i preko modela da bi se dobila funkcija gustoće vjerojatnosti $g_Y(\eta)$ izlazne veličine Y prikazan je na slici 2 za $N = 3$ neovisne veličine X_i. Ta se slika može uspoređivati sa slikom 3. za zakon prijenosa nesigurnosti. Na slici 2 funkcije gustoće vjerojatnosti $g_{X_i}(\xi_i)$, $i = 1, 2, 3$ redom su Gaussova, trokutna i Gaussova. Funkcija gustoće vjerojatnosti $g_Y(\eta)$ prikazana je kao asimetrična, što općenito proizlazi za nelinearne modele ili asimetrične ulazne funkcije gustoće vjerojatnosti $g_{X_i}(\xi_i)$.



Slika 2.: Ilustracija zakona prijenosa razdioba za $N = 3$ neovisne ulazne veličine (podtočka 5.4.4)

5.4.5 U praksi se prijenos razdioba bez aproksimacija može primjenjivati samo za jednostavne slučajeve. Za okvir nesigurnosti GUM-a primjenjuje se jedna metoda aproksimacije, a za metodu monte karlo drugu. Okvir nesigurnosti GUM-a točan je za malen, ali važan podskup problema. Metoda monte karlo nikad nije točna, ali je prihvatljivija za širi razred problema nego okvir nesigurnosti GUM-a.

5.5 Iskazivanje rezultata

5.5.1 Pri primjeni prijenosa razdioba u tipičnome bi se slučaju trebali iskazati sljedeći elementi:

a) procjena y izlazne veličine Y

b) standardna nesigurnost $u(y)$ pridružena procjeni y

c) dogovorena vjerojatnost pokrivanja od $100p$ % (npr. 95 %)

d) krajnje točke odabranog intervala pokrivanja s razinom pokrivanja od $100p$ % (npr. intervala pokrivanja s razinom pokrivanja od 95 %) za veličinu Y

e) svi drugi bitni podatci, npr. da li je interval pokrivanja vjerojatnosno simetričan interval pokrivanja ili najkraći interval pokrivanja.

5.5.2 Procjena y, nesigurnost $u(y)$ i krajnje točke intervala pokrivanja s razinom pokrivanja od $100p$ % izlazne veličine Y trebaju se iskazati s tolikim brojem desetičnih znamenaka da najmanje značljiva znamenka bude na istome mjestu u odnosu na desetični zarez kao najmanje značljiva znamenka nesigurnosti $u(y)$ [GUM:1995, 7.2.6]. Za prikaz nesigurnosti $u(y)$ obično bi bile prikladne jedna ili dvije značljive desetične znamenke.

NAPOMENA 1.: Svaka iskazana brojčana vrijednost u tipičnome bi se slučaju dobila zaokruživanjem brojčane vrijednosti izražene većim brojem važnih desetičnih znamenaka.

NAPOMENA 2.: Faktor koji utječe na odabir jedne ili dviju važnih desetičnih znamenaka vodeća je desetična znamenka nesigurnosti $u(y)$. Ako je ta znamenka jednaka 1 ili 2, odstupanje od iskazane brojčane vrijednosti nesigurnosti $u(y)$ od njezine brojčane vrijednosti prije zaokruživanja veće je u odnosu na potonju brojčanu vrijednost. Ako je vodeća desetična znamenka 9, odstupanje je razmjerno manje.

NAPOMENA 3.: Ako se ti rezultati upotrebljavaju u daljnjim izračunima, treba obratiti pozornost na to zahtijevaju li se dodatne znamenke.

PRIMJER: Za slučaj u kojemu je interval pokrivanja asimetričan u odnosu na procjenu y iskazani rezultati odgovaraju utvrđenim dvjema važnim znamenkama u nesigurnosti $u(y)$:

$y = 1{,}024$ V, $\quad u(y) = 0{,}028$ V,
najkraći interval s razinom pokrivanja od 95 % = [0,983, 1,088] V.

Isti bi rezultati iskazani s jednom značljivom znamenkom u nesigurnosti $u(y)$ bili:

$y = 1{,}02$ V, $\quad u(y) = 0{,}03$ V,
najkraći interval s razinom pokrivanja od 95 % = [0,98, 1,09] V.

5.6 Okvir nesigurnosti GUM-a

5.6.1 GUM daje opće upute za mnoge aspekte faza određivanja nesigurnosti prikazane u podtočki 5.1.1. On također osigurava okvir nesigurnosti GUM-a za faze prijenosa i prikazivanja u sažetu obliku pri određivanju nesigurnosti. Okvir nesigurnosti GUM-a koji su prihvatile mnoge organizacije široko se upotrebljava i primjenjuje u normama i uputama o mjernoj nesigurnosti, a također i u paketima programske podrške.

5.6.2 Okvir nesigurnosti GUM-a obuhvaća sljedeće faze. Svaka ulazna veličina X_i modela daje se u sažetu obliku s pomoću očekivanja i standardnih odstupanja koji su dobiveni s pomoću funkcija gustoće vjerojatnosti te veličine [GUM:1995, 4.1.6]. Uzima se da je najbolja procjena x_i veličine X_i jednaka njezinu očekivanju, a standardna nesigurnost $u(x_i)$ pridružena procjeni x_i jednaka standardnomu odstupanju. Te se informacije "prenose" uporabom zakona prijenosa nesigurnosti [GUM:1995, 5.1.2] aproksimacijom s pomoću članova prvoga i višeg reda razvoja u Taylorov red modela kako bi se dobila

(a) procjena y izlazne veličine Y i

(b) njoj pridružena standardna nesigurnost $u(y)$. Procjena y izlazne veličine dobiva se određivanjem vrijednosti modela u procjenama vrijednosti ulaznih veličina x_i. Interval pokrivanja izlazne veličine Y dobiva se tako da se kao funkcija gustoće vjerojatnosti za vrijednosti izlazne veličine uzme Gaussova ili, ako je broj stupnjeva slobode pridružen nesigurnosti $u(y)$ konačan [GUM:1995, G], normalizirana neusredištena t-razdioba.

NAPOMENA: Prikazi u sažetu obliku ulaznih veličina X_i također obuhvaćaju, gdje je to prikladno, brojeve stupnjeva slobode pridružene nesigurnostima $u(x_i)$ [GUM:1995, 4.2.6]. Gdje je to prikladno u njih su uključene i kovarijancije pridružene parovima procjena x_i [GUM:1995, 5.2.5].

5.6.3 Za okvir nesigurnosti GUM-a faze prijenosa i prikaza u sažetu obliku (faze b) i c) iz podtočke 5.1.1) sastoje se od sljedećih računskih koraka. Slika 3. prikazuje zakon prijenosa nesigurnosti za model koji ima $N = 3$ neovisne ulazne veličine $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3)^\top$ koje se procjenjuju s pomoću procjena x_i kojima su pridružene standardne nesigurnosti $u(x_i)$, $i = 1, 2, 3$. Izlazna veličina Y procjenjuje se s pomoću procjene y kojoj je pridružena standardna nesigurnost $u(y)$.

a) Određivanja očekivanja $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_N)^\top$ i standardnih odstupanja (standardnih nesigurnosti) $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = (u(x_1), \ldots, u(x_N))^\top$ iz funkcija gustoće vjerojatnosti ulaznih veličina $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_N)^\top$. Međutim ako su parovi ulaznih veličina X_i međusobno ovisni (pri čemu imaju neništične kovarijancije) za ulazne veličine $\boldsymbol{X}$, upotrebljava se zajednička funkcija gustoće vjerojatnosti.

b) Određivanja broja stupnjeva slobode (beskonačna ili konačna) pridružen svakoj nesigurnosti $u(x_i)$.

c) Određivanja *kovarijancija* (uzajamnih nesigurnosti) $u(x_i, x_j)$ pridruženih procjenama x_i, x_j. Za svaki par indeksa i, j za koji su ulazne veličine X_i i X_j ovisne, iz zajedničke funkcije gustoće vjerojatnosti za ulazne veličine X_i, X_j

d) Određivanja parcijalnih derivacija prvog reda funkcije $f(\boldsymbol{X})$ po ulaznim veličinama $\boldsymbol{X}$.

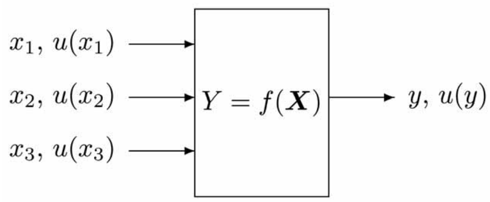
e) Izračunavanja procjena y vrijednosti izlazne veličine određivanjem vrijednosti modela u vrijednosti $\boldsymbol{x}$ ulazne veličine $\boldsymbol{X}$.

f) Izračunavanja koeficijenta osjetljivosti modela [GUM:1995, 5.1.3] kao gornje parcijalne derivacije određene u vrijednosti $\boldsymbol{x}$.

g) Određivanja standardne nesigurnosti $u(y)$ sastavljanjem nesigurnosti $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$, kovarijancija $u(x_i, x_j)$ i koeficijenata osjetljivosti modela [GUM, formule (10) i (13)].

h) Izračunavanja stvarnoga broja stupnjeva slobode ν_{eff} pridružena nesigurnosti $u(y)$ izlazne veličine Y uporabom Welch-Satterthwaiteove formule [GUM:1995, formula (G.2b)].

i) Izračunavanja povećane nesigurnosti U_p i prema tomu intervala pokrivanja (za dogovorenu vjerojatnost pokrivanja p) za izlaznu veličinu Y, koja se smatra slučajnom varijablom, formiranjem odgovarajućeg višekratnika nesigurnosti $u(y)$ uzimajući da je razdioba vjerojatnosti $(y - Y)/u(y)$ jednaka standardnoj Gaussovoj razdiobi ($\nu_{\text{eff}} = \infty$) ili t-razdiobi ($\nu_{\text{eff}} < \infty$).



Slika 3.: Ilustracija zakona prijenosa nesigurnosti za $N = 3$ neovisne ulazne veličine (podtočke 5.4.4 i 5.6.3).

5.7 Uvjeti za valjanu primjenu okvira nesigurnosti GUM-a za linearne modele

5.7.1 Za valjanu primjenu zakona prijenosa nesigurnosti na linearne modele (modele koji su linearni po ulaznim veličinama X_i) ne postoje nikakvi uvjeti.

5.7.2 Interval pokrivanja može se odrediti na temelju podataka danih u GUM-u pod sljedećim uvjetima:

a) Za izračun stvarnoga broja stupnjeva slobode koji je pridružen nesigurnosti $u(y)$ [GUM:1995, G.4.1] kad je jednoj ili više nesigurnosti $u(x_i)$ pridružen konačni broj stupnjeva slobode prikladna je Welch-Satterthwaiteova formula.

b) Kad je nesigurnosti $u(x_i)$ pridružen konačni broj stupnjeva slobode, veličina X_i neovisna je.

c) Funkcija gustoće vjerojatnosti izlazne veličine Y može se na prikladan način aproksimirati Gaussovom razdiobom ili normaliziranom i neusredištenom t-razdiobom.

NAPOMENA 1.: Uvjet a) zahtijeva se kako bi se izlazna veličina Y mogla opisati odgovarajućom normaliziranom i neusredištenom t-razdiobom.

NAPOMENA 2.: Uvjet b) zahtijeva se jer se u GUM-u ulazne veličine X_i ne smatraju ovisnima kad su povezane konačnim brojem stupnjeva slobode.

NAPOMENA 3.: Uvjet c) zadovoljen je kad je svakoj ulaznoj veličini X_i dodijeljena Gaussova razdioba. On je također zadovoljen kad su ispunjeni uvjeti središnjega graničnog teorema [GUM:1995, G.2].

NAPOMENA 4.: Okvir nesigurnosti GUM-a ne mora biti neosporno primjenjiv kad postoji neka varijabla X_i kojoj nije dodijeljena Gaussova razdioba, a čiji odgovarajući doprinos nesigurnosti $u(y)$ prevladava.

5.7.3 Kad su ispunjeni uvjeti iz podtočke 5.7.2, može se očekivati da će za linearne modele rezultati iz primjene okvira nesigurnosti GUM-a biti valjani. Ti se uvjeti primjenjuju u mnogim okolnostima.

5.8 Uvjeti za valjanu primjenu okvira nesigurnosti GUM-a za nelinearne modele

5.8.1 Zakon prijenosa nesigurnosti može se ispravno primjenjivati za nelinearne modele pod sljedećim uvjetima:

a) ako je funkcija modela f neprekidno derivabilna po elementima X_i ulazne vektorske veličine $\boldsymbol{X}$ u blizini najboljih procjena x_i ulaznih veličina X_i

b) ako se uvjet a) primjenjuje za sve derivacije do odgovarajućeg reda

c) ako su ulazne veličine X_i uključene u važne članove višeg reda aproksimacije razvojem u Taylorov red funkcije $f(\boldsymbol{X})$ neovisne

d) ako su funkcije gustoće vjerojatnosti dodijeljene ulaznim veličinama X_i koje uključuju članove višeg reda aproksimacije razvojem u Taylorov red funkcije $f(\boldsymbol{X})$ Gaussove

e) ako su članovi višeg reda koji nisu uključeni u aproksimaciju razvojem u Taylorov red funkcije $f(\boldsymbol{X})$ zanemarivi.

NAPOMENA 1.: Uvjet a) nužan je za primjenu zakona prijenosa nesigurnosti koji se temelji na aproksimaciji članovima prvog reda razvoja u Taylorov red funkcije $f(\boldsymbol{X})$ kad funkcija f [GUM:1995, 5.1.2] nije veoma nelinearna.

NAPOMENA 2.: Uvjet b) nužan je za primjenu zakona prijenosa nesigurnosti koji se temelji na aproksimaciji članovima višeg reda razvoja u Taylorov red funkcije $f(\boldsymbol{X})$ [GUM:1995, 5.1.2]. Izraz za najvažnije članove idućeg višeg reda koji trebaju biti uključeni dan je u GUM-u [GUM:1995, 5.1.2 napomena].

NAPOMENA 3.: Uvjet c) odnosi se na tvrdnju iz GUM-a [GUM:1995, 5.1.2 napomena] koja se odnosi na bitnu nelinearnost modela u slučaju neovisnosti ulaznih veličina X_i. U GUM-u se razmatraju ulazne veličine X_i koje nisu neovisne u tome kontekstu.

NAPOMENA 4.: Uvjet d) čini ispravak izjave u GUM-u [GUM:1995, 5.1.2 napomena] da se verzija zakona prijenosa nesigurnosti uporabom članova višeg reda temelji na simetriji funkcije gustoće vjerojatnosti za ulazne veličine X_i [19, 27].

NAPOMENA 5.: Ako je analitičko određivanje derivacija višeg reda, koje se zahtijevaju kad je model veoma nelinearan, teško ili lako dovodi do pogrješke, može se upotrebljavati programska podrška za automatsko diferenciranje. Alternativno se te derivacije mogu aproksimirati numerički uporabom konačnih razlika [5]. (GUM daje formulu za izračun parcijalnih derivacija prvog reda [GUM:1995, 5.1.3 napomena 2.] metodom konačnih razlika). Treba međutim voditi računa o djelovanjima poništenja razlika kad se formiraju razlike između vrijednosti modela koje su brojčano bliske.

5.8.2 Interval pokrivanja može se odrediti na temelju podataka danih u GUM-u kad se primjenjuju uvjeti a), b) i c) iz podtočke 5.7.2 s iznimkom da se sadržaj napomene 3. u toj podtočki zamijeni izrazom "uvjet c) zahtijeva se kako bi se intervali pokrivanja mogli odrediti iz tih razdioba"

5.8.3 Kad su ispunjeni uvjeti iz podtočaka 5.8.1 i 5.8.2 može se očekivati da će rezultati iz primjene okvira nesigurnosti GUM-a biti valjani za nelinearne modele. Ti se uvjeti primjenjuju u mnogim okolnostima.

5.9 Pristup monte karlo za fazu prijenosa i prikaza u sažetu obliku

5.9.1 Metoda monte karlo osigurava opći pristup za približni brojčani prikaz $\boldsymbol{G}$, recimo funkcije razdiobe vjerojatnosti $G_Y(\eta)$ izlazne veličine Y [32, stranica 75]. Bit je toga pristupa opetovano uzorkovanje iz funkcija gustoće vjerojatnosti ulaznih veličina X_i i određivanje vrijednosti modela za svaki od tih uzoraka.

5.9.2 Budući da su u funkciji razdiobe $G_Y(\eta)$ kodirani svi podatci koji su poznati o izlaznoj veličini Y, svako se svojstvo izlazne veličine Y, kao što su očekivanje, varijancija i intervali pokrivanja, može aproksimirati uporabom prikaza $\boldsymbol{G}$. Kakvoća tih izračunanih rezultata poboljšava se povećanjem broja uzoraka funkcije razdiobe vjerojatnosti.

5.9.3 Očekivanja i varijancije (te momenti višeg reda) mogu se odrediti izravno iz skupa dobivenih vrijednosti modela. Za određivanje intervala pokrivanja vrijednosti tog modela treba razvrstati rastućim redom.

5.9.4 Ako vrijednosti y_r, za $r = 1,..., M$, predstavljaju M vrijednosti modela koje su dobivene neovisnim uzorkovanjem iz razdiobe vjerojatnosti izlazne veličine Y, tada se očekivanje $E(Y)$ i varijancija $V(Y)$ mogu aproksimirati uporabom tih vrijednosti y_r. Općenito momenti izlazne veličine Y (uključujući $E(Y)$ i $V(Y)$) aproksimiraju se momentima uzorkovanih vrijednosti modela. Neka M_{y_0} označuje broj vrijednosti modela y_r koje nisu veće od y_0 kojeg unaprijed odabranoga broja. Vjerojatnost $\Pr(Y \leq y_0)$ aproksimira se brojem M_{y_0}/M. Na taj način y_r daje skokovitu funkciju (sličnu histogramu) aproksimacije funkcije razdiobe $G_Y(\eta)$.

5.9.5 Svaka vrijednost y_r dobiva se neovisnim slučajnim uzorkovanjem iz funkcije gustoće vjerojatnosti svake ulazne veličine X_i, i određivanjem modela u tako uzorkovanjem dobivenim vrijednostima. $\boldsymbol{G}$, glavni izlazni rezultat iz metode monte karlo, čine vrijednosti y_r poredane strogo rastućim redom.

NAPOMENA: Moguće su jednakosti između slabo povezanih vrijednosti y_r, u tom bi se slučaju prikladnim malim perturbacijama provedenim na y_r, omogućilo da se y_r uredi strogo rastućim redom. Vidi podtočku 7.5.1.

5.9.6 Metoda monte karlo kao primjena prijenosa razdioba prikazana je dijagramom na slici 4. za unaprijed dani broj M (inače vidi podtočku 7.9). Metoda monte karlo može se opisati kao postupak korak po korak na sljedeći način:

a) odabere se broj M pokusa monte karlo koje je potrebno izvesti. Vidi podtočku 7.2.

b) uzorkovanjem se generira M vektora iz dodijeljenih funkcija gustoće vjerojatnosti kao ostvarenja (skupa od N) ulaznih veličina X_i. Vidi podtočku 7.3.

c) za svaki takav vektor odredi se odgovarajuća vrijednost modela Y čiji je rezultat M vrijednosti modela. Vidi podtočku 7.4.

d) tih M vrijednosti modela razvrsta se strogo rastućim redom, uporabom tih razvrstanih vrijednosti modela dobiva se prikaz $\boldsymbol{G}$. Vidi podtočku 7.5.

e) prikaz $\boldsymbol{G}$ upotrebljava se za određivanje procjene y izlazne veličine Y i standardne nesigurnosti $u(y)$ pridružene procjeni y. Vidi podtočku 7.6.

f) prikaz $\boldsymbol{G}$ upotrebljava se za određivanje odgovarajućeg intervala pokrivanja izlazne veličine Y za dogovorenu vjerojatnost pokrivanja p. Vidi podtočku 7.7.

NAPOMENA 1.: Podtočka 6.4 i dodatak C daju podatke o uzorkovanju iz razdioba vjerojatnosti.

NAPOMENA 2.: Matematički je srednja vrijednost iz M vrijednosti modela ostvarenje slučajne varijable s očekivanjem $E(Y)$ i varijancijom $V(Y)/M$. Prema tomu može se očekivati da će bliskost slaganja između te srednje vrijednosti i očekivanja $E(Y)$ biti razmjerna $M^{-1/2}$.

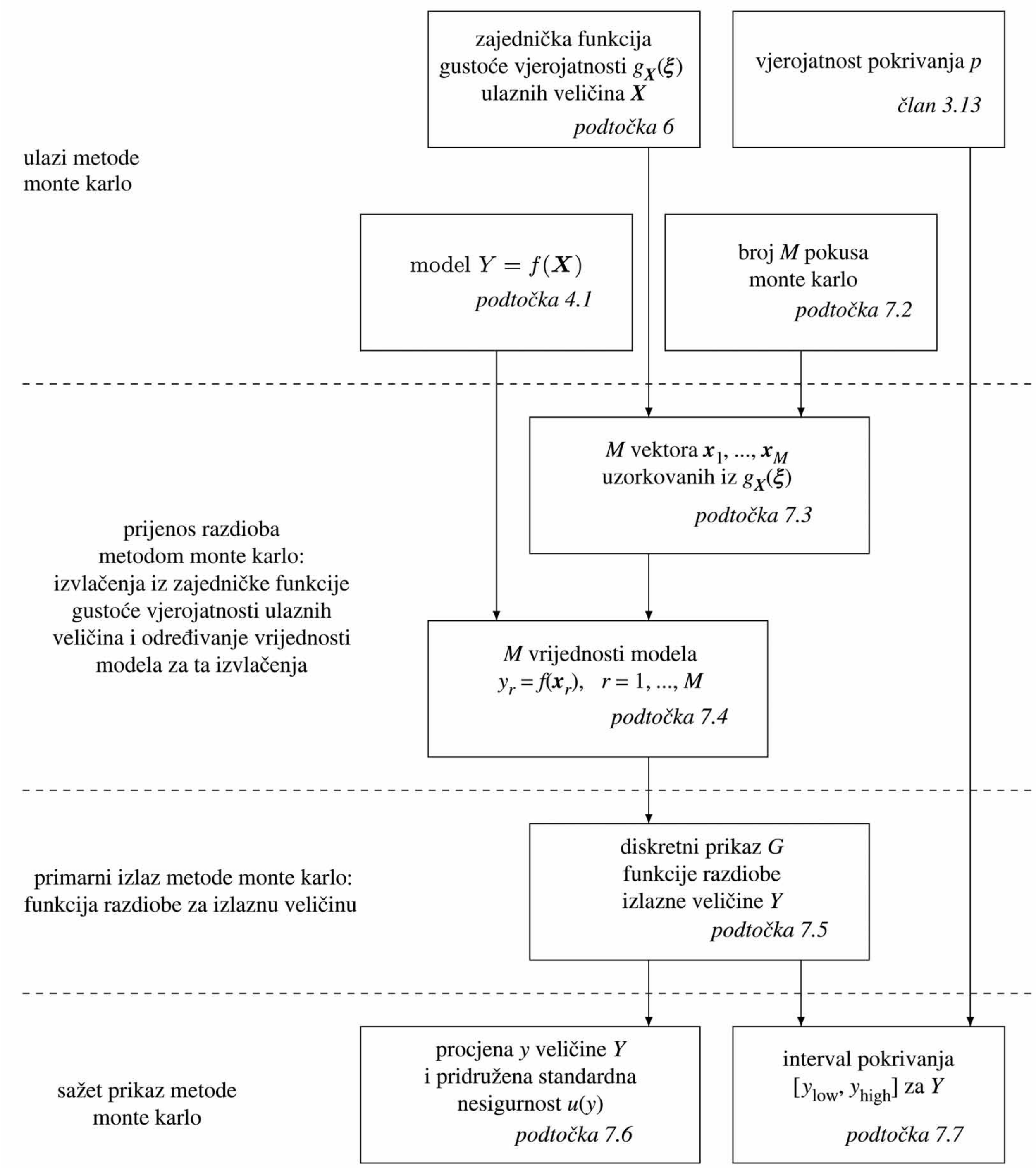
NAPOMENA 3.: Korak e) može se jednako provoditi uporabom M nerazvrstanih vrijednosti modela Y. Te je vrijednosti modela potrebno razvrstati kako bi se odredio interval pokrivanja iz koraka f).

5.9.7 Djelotvornost metode monte karlo pri određivanju procjene y, nesigurnosti $u(y)$ i intervala pokrivanja izlazne veličine Y ovisi o uporabi odgovarajućeg velikoga broja pokusa M (korak a) u podtočki 5.9.6). Upute o dobivanju takve vrijednosti i općenito o primjeni metode monte karlo dane su u [7]. Vidi također podtočke 7.2 i 7.9.

5.10 Uvjeti za valjanu primjenu opisane metode monte karlo

5.10.1 Prijenos razdioba koji se provodi uporabom metode monte karlo može se valjano primijeniti te nakon toga odrediti zahtijevani sažet prikaz podataka uporabom pristupa predviđena ovom dopunom pod sljedećim uvjetima:

a) ako je f neprekidna funkcija po elementima X_i vektora $\boldsymbol{X}$ u blizini najboljih procjena x_i ulaznih veličina X_i



Slika 4.: Faza prijenosa i prikaza u sažetu obliku određivanja vrijednosti nesigurnosti uporabom metode monte karlo (MCM) za primjenu prijenosa razdioba (podtočke 5.9.6 i 7.1)

b) ako je funkcija razdiobe izlazne veličine Y neprekidna i strogo rastuća funkcija

c) ako je funkcija gustoće vjerojatnosti izlazne veličine Y:

   1) neprekidna na intervalu za koji je funkcija gustoće vjerojatnosti strogo pozitivna

   2) unimodalna (s jednom vršnom vrijednošću) i

   3) strogo rastuća (ili jednaka ništici) lijevo od moda te strogo padajuća (ili jednaka ništici) desno od moda

d) ako postoji očekivanje $E(Y)$ i varijancija $V(Y)$

e) ako se upotrebljava dostatno velik broj pokusa M.

NAPOMENA 1.: U odnosu na uvjet a) ne zahtijevaju se nikakvi uvjeti za derivacije funkcije f.

NAPOMENA 2.: Uvjeti a) i b) nužni su kako bi se osiguralo da inverzna funkcija razdiobe bude jedinstvena te da se prema tomu mogu odrediti intervali pokrivanja. Ako se ne zahtijeva interval pokrivanja, potreban je samo uvjet a).

NAPOMENA 3.: Uvjet c) nužan je samo ako treba odrediti najkraći interval pokrivanja. U tom slučaju taj je uvjet potreban kako bi se osiguralo da najkraći interval pokrivanja koji odgovara dogovorenoj vjerojatnosti pokrivanja bude jedinstven. Mod se može pojaviti u krajnjoj točki intervala na kojemu je funkcija gustoće vjerojatnosti strogo pozitivna. U tom je slučaju jedan od dvaju uvjeta u 3) nepotreban.

NAPOMENA 4.: Uvjet d) potreban je za (stohastičku) konvergenciju metode monte karlo s povećanjem broja pokusa M (vidi podtočku 7.2).

NAPOMENA 5.: Uvjet e) potreban je kako bi se osiguralo da sažeti prikaz podataka bude pouzdan. Vidi podtočku 8.2.

5.10.2 Kad su ispunjeni uvjeti iz podtočke 5.10.1, može se očekivati da su rezultati iz primjene prijenosa nesigurnosti koji se primjenjuju u sklopu metode monte karlo valjani. Ti su uvjeti manje ograničivajući nego uvjeti (vidi podtočke 5.7 i 5.8) za primjenu okvira nesigurnosti GUM-a.

5.11 Usporedba okvira nesigurnosti GUM-a i opisane metode monte karlo

5.11.1 Namjera je ove podtočke provesti usporedbu načela na kojima se temelje okvir nesigurnosti GUM-a i metoda monte karlo kao primjena prijenosa razdioba. Ova podtočka također daje neke razloge za uporabu metode monte karlo u okolnostima u kojima je upitna valjanost primjene okvira nesigurnosti GUM-a.

5.11.2 U svrhu usporedbe okvira nesigurnosti GUM-a i metode monte karlo korisno je kritički pregledati razmatranja u GUM-u koja se odnose na određivanja nesigurnosti A-vrste i B-vrste. Za određivanja nesigurnosti tipa A GUM daje upute za dobivanje najbolje procjene veličine i pridružene standardne nesigurnosti iz prosječne vrijednosti i pridruženoga standardnog odstupanja skupa neovisno dobivenih pokazivanja veličine. Za određivanje nesigurnosti B-vrste za opis veličine funkcijom gustoće vjerojatnosti iz koje se određuju najbolja procjena veličine i standardna nesigurnost pridružena toj procjeni upotrebljava se apriorno znanje o toj veličini. GUM utvrđuje da se oba tipa određivanja temelje na razdiobama vjerojatnosti [GUM:1995, 3.3.4] te da se za oba pristupa upotrebljavaju priznata tumačenja vjerojatnosti [GUM:1995, 3.3.5]. U GUM-u se smatra da funkcije gustoće vjerojatnosti čine temelj za određivanje nesigurnosti: u kontekstu zakona prijenosa nesigurnosti u njemu se izravno navodi da se ulazne i izlazne veličine mogu opisati ili karakterizirati razdiobama vjerojatnosti [GUM:1995, G.6.6]. Vidi također podtočku 5.1.2.

5.11.3 Okvir nesigurnosti GUM-a ne određuje eksplicitno funkciju gustoće vjerojatnosti izlazne veličine. Međutim za funkciju razdiobe koja se upotrebljava u tom okviru za opis izlazne veličine katkad se u ovoj dopuni kaže da je "dana" okvirom ili da je "rezultat" okvira nesigurnosti GUM-a.

5.11.4 Ovom se dopunom pokušava osigurati pristup koji je u najvećoj mjeri u skladu s GUM-om, posebno u odnosu na uporabu funkcija gustoće vjerojatnosti za sve veličine, ali gdje je to prikladno odstupa od njega na jasno utvrđen način. Ovo su ta odstupanja:

a) svim ulaznim veličinama X_i izravno se dodjeljuju funkcije gustoće vjerojatnosti (a ne pridružene standardne nesigurnosti pridružene procjenama x_i veličina X_i) na temelju podataka koji se odnose na te veličine. Nije potrebno razvrstavanje na određivanja nesigurnosti A-vrste i B-vrste;

b) koeficijenti osjetljivosti [GUM:1995, 5.1.3] nisu sastavni dio toga pristupa te se prema tomu ne zahtijeva izračun ili brojčana aproksimacija parcijalnih derivacija modela po veličini X_i. Mogu se međutim dobiti aproksimacije koeficijenata osjetljivosti koje odgovaraju uzimanju u obzir svih članova višeg reda razvoja u Taylorov red modela (dodatak B);

c) dobiva se brojčani prikaz funkcije razdiobe izlazne veličine Y koji je u potpunosti definiran modelom, a funkcije gustoće vjerojatnosti ulaznih veličina X_i nisu ograničene na Gaussovu razdiobu ili normaliziranu i neusredištenu t-razdiobu;

d) budući da funkcija gustoće vjerojatnosti izlazne veličine Y nije općenito simetrična, interval pokrivanja izlazne veličine Y nije nužno usredišten na procjenu izlazne veličine Y. Prema tomu potrebno je provesti odabir intervala pokrivanja koji odgovara specificiranoj vjerojatnosti pokrivanja.

5.11.5 Budući da se u okviru nesigurnosti GUM-a eksplicitno upotrebljavaju samo najbolje procjene x_i i pridružene nesigurnosti (i kad je to prikladno kovarijancije i brojevi stupnjeva slobode), njime se o izlaznoj veličini Y mogu dobiti ograničeni podatci. U biti on je ograničen na davanje procjene y izlazne veličine Y i standardne nesigurnosti $u(y)$ pridružene procjeni y te možda odgovarajućeg (stvarnog) broja stupnjeva slobode. Procjena y i nesigurnost $u(y)$ bit će valjane za model koji je linearan po ulaznoj veličini X. Svi drugi podatci o izlaznoj veličini Y, npr. intervali pokrivanja, izvode se uporabom dodatnih pretpostavka, npr. da je razdioba izlazne veličine Y Gaussova ili normalizirana i neusredištena t-razdioba.

5.11.6 Ovo su neka svojstva metode monte karlo:

a) manje posla na analizi koja se zahtijeva za složene ili nelinearne modele, posebno zato jer nisu potrebne parcijalne derivacije prvoga ili viših redova koje se upotrebljavaju za dobivanje koeficijenata osjetljivosti za zakon prijenosa nesigurnosti

b) općenito bolja procjena izlazne veličine Y za nelinearne modele (vidi [GUM:1995, 4.1.4])

c) bolja standardna nesigurnost pridružena procjeni izlazne veličine Y za nelinearne modele, posebno kad su ulaznim veličinama X_i dodijeljene ne-Gaussove (npr. asimetrične) funkcije gustoće vjerojatnosti, bez potrebe da se daju derivacije višeg reda [GUM:1995, 5.1.2 napomena]

d) dobivanje intervala povjerenja koji odgovara dogovorenoj vjerojatnosti kad se funkcije gustoće vjerojatnosti izlazne veličine Y ne mogu na prikladan način aproksimirati Gaussovom razdiobom ili normaliziranom neusredištenom t-razdiobom, tj. kad se ne primjenjuje središnji granični teorem [GUM:1995, G.2.1 i G.6.6]. Takva neprikladna aproksimacija može nastati (1) kad funkcija gustoće vjerojatnosti dodijeljena dominantnoj ulaznoj veličini X_i nije Gaussova razdioba ili normalizirana i neusredištena t-razdioba, (2) kad je model nelinearan ili (3) kad pogrješka aproksimacije koja nastaje iz Welch-Satterthwaiteove formule za stvarni broj stupnjeva slobode nije zanemariva i

e) ne zahtijeva se faktor pokrivanja [GUM:1995, G.2.3.6] kad se određuje interval pokrivanja.

6 Funkcije gustoće vjerojatnosti ulaznih veličina

6.1 Općenito

6.1.1 Ova točka daje upute o dodjeli, u određenim uobičajenim okolnostima, funkcija gustoće vjerojatnosti ulaznim veličinama X_i u fazi formulacije određivanja nesigurnosti. Takva se dodjela može temeljiti na Bayesovu teoremu [20] ili na načelu najveće entropije [8, 26, 51, 56].

NAPOMENA: U nekim okolnostima može biti koristan drugi pristup za dodjelu funkcija gustoće vjerojatnosti. U svakome slučaju kao u svakoj znanstvenoj disciplini treba zabilježiti razlog za tu odluku.

6.1.2 Ulaznim veličinama $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_N)^\top$ općenito se dodjeljuje zajednička funkcija gustoće vjerojatnosti $g_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\xi})$. Vidi podtočku 6.4.8.4 napomenu 2.

6.1.3 Kad su ulazne veličine X_i neovisne, funkcije gustoće vjerojatnosti $g_{X_i}(\xi_i)$ dodjeljuju se pojedinačno na temelju analize nizova pokazivanja (određivanje nesigurnosti A-vrste) ili na temelju znanstvene prosudbe uporabom podataka [50] kao što su povijesni podatci, umjeravanja te stručnom prosudbom (određivanje nesigurnosti B vrste) [GUM:1995, 3.3.5].

6.1.4 Kad su ulazne veličine uzajamno neovisne, funkcije gustoće vjerojatnosti dodjeljuju im se pojedinačno, a ostatku zajednička funkcija gustoće vjerojatnosti.

NAPOMENA: Određene ili sve ovisnosti može biti moguće ukloniti preuređenjem izraza za neke ili sve ulazne veličine s pomoću temeljnijih uzajamno neovisnih ulaznih veličina o kojima ovise izvorne ulazne veličine [GUM:1995, F1.2.4, H.1.2]. Takvim se promjenama može pojednostavniti primjena zakona prijenosa nesigurnosti i prijenosa razdioba. Dani su podrobni podatci i primjeri [15].

6.1.5 Podatci bitni za dodjelu funkcija gustoće vjerojatnosti ulaznim veličinama X_i sadržani su u GUM-u [GUM:1995, 4.3].

6.1.6 Opširne upute za dodjelu funkcija gustoće vjerojatnosti pojedinačnim ili zajedničkim razdiobama ulaznih veličina X_i izlaze iz okvira ove dopune. U takvim dodijeljenim funkcijama gustoće vjerojatnosti sadržano je kodirano znanje i iskustvo mjeritelja koji su formulirali model i koji su konačno odgovorni za kakvoću konačnih rezultata.

6.1.7 Standardni je udžbenik o razdiobama vjerojatnosti knjiga Evansa, Hastingsa i Peacocka [18].

6.2 Bayesov teorem

6.2.1 Uzmimo da se podatci o ulaznoj veličini X sastoje od niza pokazivanja koja se smatraju ostvarenjem neovisnih, jednako raspodijeljenih slučajnih varijabla koje su opisane specificiranom funkcijom gustoće vjerojatnosti, ali s nepoznatim očekivanjem i varijancijom. Za izračun funkcije gustoće vjerojatnosti veličine X može se upotrebljavati Bayesov teorem, pri čemu se uzima da je X jednako nepoznatoj prosječnoj vrijednosti tih slučajnih varijabla. Izračun se odvija u dva koraka. Prvo se nepoznatomu očekivanju i varijanciji dodijeli neinformativna zajednička apriorna (prije podataka) funkcija gustoće vjerojatnosti. Uporabom Bayesova teorema ta se zajednička apriorna funkcija gustoće vjerojatnosti prilagođuje novim podatcima koji se dobivaju iz niza pokazivanja kako bi se dobila zajednička aposteriorna (poslije podataka) funkcija gustoće vjerojatnosti za ta dva nepoznata parametra. Željena aposteriorna funkcija gustoće vjerojatnosti za nepoznatu prosječnu vrijednost tada se izračunava kao marginalna funkcija gustoće vjerojatnosti integracijom po svim mogućim vrijednostima nepoznate varijancije (vidi podtočku 6.4.9.2).

6.2.2 Uporabom Bayesova teorema provodi se prilagodba formiranjem umnoška funkcija istinitosti i apriorne funkcije gustoće vjerojatnosti [20]. Funkcija istinitosti umnožak je funkcija, jedne funkcije za svako pokazivanje koja je po obliku istovjetna npr. Gaussovoj funkciji gustoće vjerojatnosti s očekivanjem jednakim pokazivanju i varijancijom formalno jednakom nepoznatoj varijanciji. Aposteriorna se funkcija gustoće vjerojatnosti tada određuje integriranjem toga umnoška po svim mogućim vrijednostima varijancije i normalizacijom dobivenog izraza.

NAPOMENA 1.: U određenim slučajevima (npr. kao u podtočki 6.4.11) slučajne varijable čija se pokazivanja smatraju ostvarenjima opisuju se funkcijom gustoće vjerojatnosti sa samo jednim parametrom. U takvim slučajevima neinformativne aposteriorne razdiobe veličine X dane su izravno Bayesovim teoremom bez potrebe za marginalizacijom.

NAPOMENA 2.: Bayesov teorem može se također primjenjivati i u drugim okolnostima, npr. kad su očekivanja i standardna odstupanja poznata i jednaka.

6.3 Načelo najveće entropije

6.3.1 Kad se upotrebljava načelo najveće entropije, koje je uveo Jaynes [25], između svih mogućih funkcija gustoće vjerojatnosti odabire se jedinstvena funkcija gustoće vjerojatnosti koja ima specificirana svojstva, npr. specificirane središnje momente različitog reda ili specificirane intervale u kojima funkcija gustoće vjerojatnosti ima neništičnu vrijednost. Ta je metoda posebno korisna za dodjelu funkcija gustoće vjerojatnosti veličinama za koje ne postoji niz pokazivanja ili veličinama koje uopće nisu izravno mjerene.

6.3.2 U primjeni načela najveće entropije da bi se dobila funkcija gustoće vjerojatnosti $g_X(\xi)$ koja primjereno opisuje nepotpuno znanje o veličini X u skladu s raspoloživim podatcima, funkcional:

$$S[g] = -\int g_X(\xi) \ln g_X(\xi)\, \mathrm{d}\xi,$$

"informacijska entropija", kojeg je uveo Shannon [48], poprima najveću vrijednost uz ograničenja koja su dana tim podatcima.

6.4 Dodjela funkcija gustoće vjerojatnosti za neke uobičajene okolnosti

6.4.1 Općenito

Podtočkama 6.4.2 – 6.4.11 propisuje se dodjela funkcija gustoće vjerojatnosti veličinama na temelju podataka koji se odnose na te veličine. Za svaku funkciju gustoće vjerojatnosti $g_X(\xi)$ dane su

(a) formule za očekivanje i varijanciju veličine X i

(b) način na koji se može provoditi uzorkovanje iz $g_X(\xi)$. Tablica 1. olakšava uporabu tih podtočaka te također ilustrira odgovarajuće funkcije gustoće vjerojatnosti.

NAPOMENA: Te ilustracije funkcija gustoće vjerojatnosti nisu nacrtane u mjerilu. Višedimenzijska Gaussova funkcija gustoće vjerojatnosti nije ilustrirana.

6.4.2 Pravokutne razdiobe

6.4.2.1 Ako su jedini dostupni podatci koji se odnose na veličinu X donja granica a i gornja granica b s $a < b$, tada bi u skladu s načelom najveće entropije veličini X na odsječku (a, b) bila dodijeljena pravokutna razdioba $\mathrm{R}(a, b)$.

6.4.2.2 Funkcija gustoće vjerojatnosti veličine X jednaka je:

$$g_x(\xi) = \begin{cases} 1/(b-a), & a \le \xi \le b, \\ 0, & \text{u ostalim slučajevima.} \end{cases}$$

6.4.2.3 Veličina X ima očekivanje i varijanciju:

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \tag{2}$$

6.4.2.4 Za uzorkovanje razdiobe $\mathrm{R}(a, b)$, iz standardne pravokutne razdiobe $\mathrm{R}(0, 1)$ izvuče se broj r (vidi podtočku C.3.3) i formira izraz:

$$\xi = a + (b-a)r.$$

6.4.3 Pravokutne razdiobe s granicama koje nisu točno propisane

6.4.3.1 Poznato je da veličina X leži između granica A i B s $A < B$, pri čemu središte odsječka $(A + B)/2$ definirano tim granicama ima stalnu vrijednost, a duljina odsječka $B - A$ nije točno poznata. Poznato je da A leži u odsječku $a \pm d$, a B u odsječku $b \pm d$, pri čemu su specificirani a, b i d s $d > 0$ i $a + d < b - d$. Ako ne postoje drugi podatci koji se odnose na X, A i B, može se primijeniti načelo najveće entropije kako bi se veličini X dodijelila "krivocrtna trapezna" razdioba (pravokutna razdioba s netočno propisnim granicama).

6.4.3.2 Funkcija gustoće vjerojatnosti veličine X jednaka je:

$$g_x(\xi) = \frac{1}{4d}\begin{cases} \ln[(w+d)/(x-\xi)], & a-d \le \xi \le a+d \\ \ln[(w+d)/(w-d)], & a+d < \xi < b-d \\ \ln[(w+d)/(\xi-x)], & b-d \le \xi \le b+d \\ 0, & \text{u ostalim slučajevima,} \end{cases} \tag{3}$$

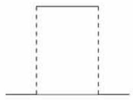
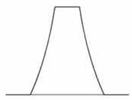
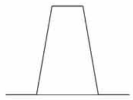
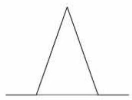
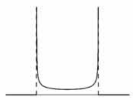
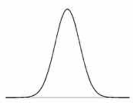
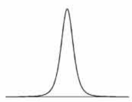
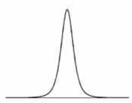
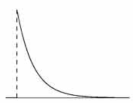
gdje su $x = (a + b)/2$ i $w = (b - a)/2$ redom središte i poluširina odsječka $[a, b]$ [GUM:1995, 4.39 napomena 2]. Ta funkcija gustoće vjerojatnosti ima oblik sličan trapeznome, ali s nepravocrtnim bočnim stranicama.

NAPOMENA: Formula (3) može se izraziti kao:

$$g_X(\xi) = \frac{1}{4d}\max\left(\ln\frac{w+d}{\max(|\xi - x|, w-d)}, 0\right)$$

za računalnu primjenu.

Tablica 1.: Dostupni podatci za funkciju gustoće vjerojatnosti na temelju podataka (podtočke 6.4.1 i C.1.2)

Dostupni podatci	Dodijeljena funkcija gustoće vjerojatnosti i slika (ne u mjerilu)		Podtočka
Donja i gornja granica a i b	Pravokutna: $\mathrm{R}(a, b)$		6.4.2
Donja i gornja granica koje nisu točno određene $a \pm d$, $b \pm d$	Krivocrtna trapezna: $\mathrm{CTrap}(a, b, d)$		6.4.3
Zbroj dviju veličina kojima su dodijeljene pravokutne razdiobe s donjim a_1, b_1 i gornjim granicama a_2, b_2	Trapezna: $\mathrm{Trap}(a, b, \beta)$ s $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$, $\beta = \lvert(b_1 - a_1) - (b_2 - a_2)\rvert/(b - a)$		6.4.4
Zbroj dviju veličina kojima su dodijeljene pravokutne razdiobe s donjim a_1, b_1 i gornjim granicama a_2, b_2 i s istom polušrinom $(b_1 - a_1 = b_2 - a_2)$	Trokutna: $\mathrm{T}(a, b)$ s $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$		6.4.5
Ciklična sinusna promjena između gornje i donje granice a, b	Arkussinus (U-razdioba): $\mathrm{U}(a, b)$		6.4.6
Najbolja procjena x i pridružena standardna nesigurnost $u(x)$	Gaussova: $\mathrm{N}(x, u^2(x))$		6.4.7
Najbolja procjena $\boldsymbol{x}$ vektorske veličine i pridružena matrica nesigurnosti $\boldsymbol{U_x}$	Višedimenzijska Gaussova: $\mathrm{N}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{U_x})$		6.4.8
Niz neovisno uzorkovanih pokazivanja $x_1, \ldots, x_n$ iz veličine koja ima Gaussovu razdiobu s nepoznatim očekivanjem i varijancijom	Normalizirana i neusredištena t-razdioba: $t_{n-1}(\bar{x}, s^2/n)$ s $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i / n$, $s^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2/(n-1)$,		6.4.9.2
Najbolja procjena x, povećana nesigurnost U_p faktor pokrivanja k_p i stvarni broj stupnjeva slobode ν_eff	Normalizirana i neusredištena t-razdioba: $t_{\nu_\mathrm{eff}}(x, (U_\mathrm{p}/k_\mathrm{p})^2)$		6.4.9.7
Najbolja procjena x nenegativne veličine	Eksponencijalna: $\mathrm{Ex}(1/x)$		6.4.10
Broj q predmeta koji se broje	Gama: $\mathrm{G}(q + 1, 1)$		6.4.11

6.4.3.3 Veličina X ima očekivanje i varijanciju

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} + \frac{d^2}{9}. \tag{4}$$

NAPOMENA 1.: Varijancija u izrazu (4) uvijek je veća od varijancije koja vrijedi za točne granice u izrazu (2), tj. kad je $d = 0$.

NAPOMENA 2.: U GUM-u se s podatcima o veličini X postupa kao u podtočki 6.4.3.1 dodjelom broja stupnjeva slobode standardnoj nesigurnosti pridruženoj najboljoj procjeni veličine X [GUM:1995, G.4.2].

6.4.3.4 Za uzorkovanje iz razdiobe CTrap(a, b, d), iz standardne pravokutne razdiobe R(0, 1) provedu se dva neovisna izvlačenja brojeva r_1 i r_2 (vidi podtočku C.3.3) i formiraju izrazi:

$$a_S = (a - d) + 2dr_1, \qquad b_S = (a + b) - a_S,$$

i

$$\xi = a_S + (b_S - a_S)r_2.$$

NAPOMENA: Vrijednost a_S izvlači se iz pravokutne razdiobe s granicama $a \pm d$. Tada se vrijednost b_S formira tako da se osigura da središte a_S i b_S bude jednako propisanoj vrijednosti $x = (a + b)/2$.

PRIMJER: U potvrdi o umjeravanju navodi se da napon X leži u odsječku 10,0 V ± 0,1 V. Nisu dostupni nikakvi drugi podatci koji se odnose na veličinu X osim što se vjeruje da su vrijednosti koje odgovaraju krajnjim točkama rezultat ispravnog zaokruživanja neke brojčane vrijednosti (vidi podtočku 3.20). Iz toga proizlazi da ta brojčana vrijednost leži između 0,05 V i 0,15 V jer je brojčana vrijednost svake točke u odsječku (0,05, 0,15) zaokružena na jednu značljivu desetičnu znamenku jednaka 0,1. Prema tomu može se smatrati da je određeno mjesto odsječka, dok njegova širina nije točno poznata. Vrijednost x = 10,0 V najbolja procjena veličine X te je uporabom izraza (4) na temelju vrijednosti parametara a = 9,9 V, b = 10,1 V i d = 0,05 V, pridružena standardna nesigurnost $u(x)$ dana je izrazom:

$$u^2(x) = \frac{(0{,}2)^2}{12} + \frac{(0{,}05)^2}{9} = 0{,}003\ 6.$$

Prema tomu je $u(x) = (0{,}003\ 6)^{1/2}$ = 0,060 V, što se može uspoređivati s nesigurnošću od $0{,}2/\sqrt{12}$ = 0,058 V u slučaju točno poznatih granica, koja se dobije zamjenom d ništicom. Uporaba točno poznatih granica u tom slučaju daje brojčanu vrijednost za nesigurnost $u(x)$ koja je za 4 % manja od one za granice koje nisu točno poznate. Važnost takve razlike treba uzeti u obzir u kontekstu primjene.

6.4.4 Trapezna razdioba

6.4.4.1 U GUM-u [GUM:1995, 4.3.9] se raspravlja o dodjeli simetrične trapezne razdiobe nekoj veličini. Uzmimo da je koja veličina X definirana kao zbroj dviju neovisnih veličina X_1, X_2. Uzmimo da je za i = 1 i i = 2 veličini X_i dodijeljena pravokutna razdioba R(a_i, b_i) s donjom granicom a_i i gornjom granicom b_i. Tada je razdioba veličine X simetrična trapezna razdioba Trap(a, b, β) s donjom granicom a i gornjom granicom b, a parametar β jednak je omjeru poluširine gornje osnovice i poluširine i donje osnovice trapeza. Parametri te trapezne razdiobe povezani su s parametrima pravokutnih razdioba izrazom:

$$a = a_1 + a_2, \quad b = b_1 + b_2, \quad \beta = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \tag{5}$$

gdje je:

$$\lambda_1 = \frac{|(b_1 - a_1) - (b_2 - a_2)|}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{b - a}{2}, \tag{6}$$

i

$$0 \le \lambda_1 \le \lambda_2.$$

6.4.4.2 Funkcija gustoće vjerojatnosti veličine X (slika 5.) dobivena uporabom konvolucije [42, str. 93] jednaka je:

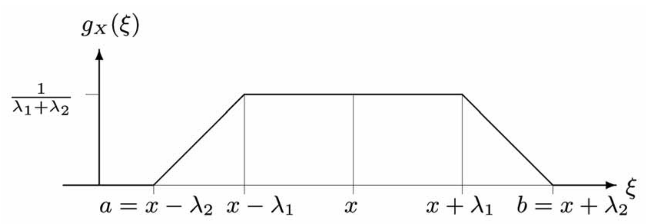
$$g_X(\xi) = \begin{cases} (\xi - x + \lambda_2)/(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) & x - \lambda_2 \le \xi < x - \lambda_1 \\ 1/(\lambda_1 + \lambda_2), & x - \lambda_1 \le \xi \le x + \lambda_1 \\ (x + \lambda_2 - \xi)/(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) & x + \lambda_1 < \xi \le x + \lambda_2 \\ 0, & \text{u ostalim slučajevima,} \end{cases} \tag{7}$$

gdje je: $x = (a + b)/2$.

NAPOMENA: Formula (7) može se izraziti kao:

$$g_X(\xi) = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \min\left(\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \max(\lambda_2 - |\xi - x|, 0), 1 \right)$$

za računalnu primjenu.



Slika 5.: Trapezna funkcija gustoće vjerojatnosti za $X = X_1 + X_2$, gdje su funkcije gustoće vjerojatnosti veličina X_1, X_2 pravokutne (podtočka 6.4.4.2)

6.4.4.3 Veličina X ima očekivanje i varijanciju:

$$E(X) = \frac{a + b}{2}, \quad V(X) = \frac{(b - a)^2}{24}(1 + \beta^2). \tag{2}$$

6.4.4.4 Za uzorkovanje iz razdiobe Trap(a, b, β), iz standardne pravokutne razdiobe R(0, 1) provedu se dva izvlačenja brojeva r_1 i r_2 (podtočka C.3.3) i formira izraz:

$$\xi = a + \frac{b - a}{2}[(1 + \beta)r_1 + (1 - \beta)r_2].$$

6.4.5 Trokutna razdioba

6.4.5.1 Uzmimo da je koja veličina X definirana kao zbroj dviju neovisnih veličina od kojih je svakoj dodijeljena pravokutna razdioba (vidi podtočku 6.4.4), ali s jednakim poluširinama, tj. $b_1 - a_1 = b_2 - a_2$. Iz izraza (5) i (6) slijedi da $\lambda_1 = 0$ i $\beta = 0$. Razdioba je veličine X trapezna Trap(a, b, 0) koja se svodi na (simetričnu) trokutnu razdiobu Trap(a, b) u odsječku $[a, b]$.

6.4.5.2 Funkcija gustoće vjerojatnosti veličine X jednaka je:

$$g_X(\xi) = \begin{cases} (\xi - a)/w^2, & a \le \xi \le x, \\ (b - \xi)/w^2, & x < \xi \le b \\ 0, & \text{u ostalim slučajevima,} \end{cases} \tag{8}$$

gdje je $x = (a + b)/2$, a $w = \lambda_2 = (b - a)/2$.

NAPOMENA: Formula (8) može se izraziti u obliku:

$$g_X(\xi) = \frac{2}{b-a} \max\left(1 - \frac{2|\xi - x|}{b-a}, 0\right).$$

za računalnu primjenu.

6.4.5.3 Veličina X ima očekivanje i varijanciju:

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{24}.$$

6.4.5.4 Za uzorkovanje iz razdiobe Trap(a, b), iz standardne pravokutne razdiobe R(0, 1) provedu se dva neovisna izvlačenja brojeva r_1 i r_2 (vidi podtočku C.3.3) i formira izraz:

$$\xi = a + \frac{b-a}{2}(r_1 + r_2).$$

6.4.6 Arkussinus razdiobe (U-razdiobe)

6.4.6.1 Ako je poznato da se veličina X mijenja ciklično po sinusnome zakonu s nepoznatom fazom Φ, između specificiranih granica a i b pri čemu je $a < b$ tada bi se u skladu s načelom najveće entropije fazi Φ dodijelila pravokutna razdioba R(0, 2π). Veličini X dodijeljena je arkussinus razdioba U(a, b) [18] dana transformacijom:

$$X = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \sin \Phi,$$

gdje Φ ima pravokutnu razdiobu R(0, 2π).

6.4.6.2 Funkcija gustoće vjerojatnosti veličine X jednaka je:

$$g_X(\xi) = \begin{cases} (2/\pi)[(b-a)^2 - (2\xi - a - b)^2]^{-1/2} & a < \xi < b, \\ 0, & \text{u ostalim slučajevima.} \end{cases}$$

NAPOMENA: Razdioba U(a, b) povezana je sa standardnom arkussinus razdiobom U(0, 1) koja je dana izrazom:

$$g_Z(z) = \begin{cases} [z(1-z)]^{-1/2}/\pi & 0 < z < 1 \\ 0, & \text{u ostalim slučajevima,} \end{cases} \tag{9}$$

po veličini Z, linearnom transformacijom

$$X = a + (b-a)Z.$$

Z ima očekivanje 1/2 i varijanciju 1/8. Razdioba (9) naziva se arkussinus razdiobom jer je odgovarajuća funkcija razdiobe jednaka

$$G_Z(z) = \frac{1}{\pi} \arcsin(2z - 1) + \frac{1}{2}.$$

To je poseban slučaj beta-razdiobe čija su oba parametra jednaka jednoj polovini.

6.4.6.3 Veličina X ima očekivanje i varijanciju:

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad V(X) = \frac{(b-a)^2}{8}.$$

6.4.6.4 Za uzorkovanje iz U(a, b), iz standardne pravokutne razdiobe R(0, 1) izvuče se broj r (vidi podtočku C.3.3) i formira izraz:

$$\xi = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \sin 2\pi r.$$

6.4.7 Gaussove razdiobe

6.4.7.1 Ako su najbolja procjena x i pridružena standardna nesigurnost $u(x)$ jedini raspoloživi podatci koji se odnose na veličinu X, tada bi se u skladu s načelom najveće entropije veličini X dodijelila Gaussova razdioba $\mathrm{N}(x, u^2(x))$.

6.4.7.2 Funkcija gustoće vjerojatnosti veličine X jednaka je:

$$g_X(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}u(x)} \exp\left(-\frac{(\xi - x)^2}{2u^2(x)} \right). \tag{10}$$

6.4.7.3 Veličina X ima očekivanje i varijanciju:

$$E(X) = x, \; V(X) = u^2(x).$$

6.4.7.4 Za uzorkovanje iz razdiobe $\mathrm{N}(x, u^2(x))$ iz standardne Gaussove razdiobe $\mathrm{N}(0, 1)$ izvuče se broj z (vidi podtočku C.4) i formira izraz:

$$\xi = x + u(x)z.$$

6.4.8 Višedimenzijske Gaussove razdiobe

6.4.8.1 Rezultat usporediv s onim iz podtočke 6.4.7.1 vrijedi i za N-dimenzijsku veličinu $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_N)^\top$. Kad su jedini raspoloživi podatci najbolja procjena $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_N)^\top$ veličine $\boldsymbol{X}$ i pridružena (strogo) pozitivno definirana matrica nesigurnosti

$$\boldsymbol{U_x} = \begin{bmatrix} u^2(x_1) & u(x_1, x_2) & \cdots & u(x_1, x_N) \\ u(x_2, x_1) & u^2(x_2) & \cdots & u(x_2, x_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(x_N, x_1) & u(x_N, x_2) & \cdots & u^2(x_N) \end{bmatrix},$$

veličini $\boldsymbol{X}$ bila bi dodijeljena višedimenzijska Gaussova razdioba $\mathrm{N}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{U_x})$.

6.4.8.2 Zajednička funkcija gustoće vjerojatnosti veličine $\boldsymbol{X}$ jednaka je:

$$g_X(\xi) = \frac{1}{[(2\pi)^N \det U_x]^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\xi - x)^\top \boldsymbol{U_x}^{-1}(\xi - x)\right). \tag{11}$$

6.4.8.3 Veličina $\boldsymbol{X}$ ima očekivanje i kovarijancijsku matricu:

$$E(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{x}, \quad V(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{U_x}.$$

6.4.8.4 Za uzorkovanje iz $\mathrm{N}(x, \boldsymbol{U_x})$, iz standardne Gaussove razdiobe $\mathrm{N}(0, 1)$ izvuče se N neovisnih vrijednosti z_i, $i = 1, \ldots, N$, (vidi podtočku C.4) i formira izraz:

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{R}^\top \boldsymbol{z}.$$

gdje je $\boldsymbol{z} = (z_1, \ldots, z_N)^\top$, a $\boldsymbol{R}$ gornja trokutna matrica koja je dana Choleskyjevim rastavljanjem matrice $\boldsymbol{U_x} = \boldsymbol{R}^\top\boldsymbol{R}$ (vidi podtočku C.5).

NAPOMENA 1.: Umjesto Choleskyjeva rastavljanja matrice $\boldsymbol{U_x} = \boldsymbol{R}^\top\boldsymbol{R}$ može se upotrebljavati bilo koja faktorizacija matrice toga oblika.

NAPOMENA 2.: Jedine zajedničke funkcije gustoće vjerojatnosti koje se razmatraju u ovoj dopuni višedimenzijske su Gaussove razdiobe koje se općenito susreću u praksi. U nastavku (i u podtočki C.5) dan je numerički postupak za uzorkovanje iz višedimenzijske Gaussove funkcije gustoće vjerojatnosti. Ako se upotrebljava druga višedimenzijska funkcija gustoće vjerojatnosti, treba predvidjeti načine uzorkovanja iz te funkcije.

NAPOMENA 3.: Kad nema djelovanja kovarijancije višedimenzijska se Gaussova funkcija gustoće vjerojatnosti (11) svodi na umnožak N jednodimenzijskih Gaussovih funkcija gustoće vjerojatnosti. U tom je slučaju:

$$\boldsymbol{U_x} = \mathrm{dijag}(u^2(x_1), \ldots, u^2(x_N))$$

gdje je:

$$g_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\xi}) = \prod_{i=1}^{N} g_{X_i}(\xi_i)$$

s

$$g_{X_i}(\xi_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}u(x_i)} \exp\left(-\frac{(\xi_i - x_i)^2}{2u^2(x_i)} \right).$$

6.4.9 *t*-razdiobe

6.4.9.1 *t*-razdiobe pojavljuju se redovito u dva slučaja: pri određivanju vrijednosti niza pokazivanja (vidi podtočku 6.4.9.2) i tumačenju potvrda o umjeravanju (vidi podtočku 6.4.9.7).

6.4.9.2 Pretpostavimo da je dan niz od n pokazivanja $x_1, \ldots, x_n$ za koje se smatra da su dobivena neovisno iz veličine s nepoznatim očekivanjem μ_0 i nepoznatom varijancijom σ_0^2 koja ima Gaussovu razdiobu $\mathrm{N}(\mu_0, \mu_0^2)$. Uzima se da je željena ulazna veličina X jednaka μ_0. Ako se očekivanju μ_0 i varijanciji σ_0^2 dodijeli neinformativna zajednička apriorna razdioba i upotrijebi Bayesov teorem, tada je marginalna funkcija gustoće vjerojatnosti veličine X normalizirana i neusredištena t-razdioba $t_\nu(\bar{x}, s^2/n)$ s $\nu = n - 1$ stupnjeva slobode gdje su:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\,, \quad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2\,,$$

redom prosječna vrijednost i varijancija pokazivanja [20].

6.4.9.3 Funkcija gustoće vjerojatnosti veličine X jednaka je:

$$g_X(\xi) = \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma((n-1)/2)\sqrt{(n-1)\pi}} \times \frac{1}{s/\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{n-1}\left(\frac{\xi - \bar{x}}{s/\sqrt{n}} \right)^2 \right)^{-n/2}, \tag{12}$$

gdje je

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t, \quad z > 0\,,$$

gama-funkcija.

6.4.9.4 Veličina X ima očekivanje i varijanciju:

$$E(X) = \bar{x}, \quad V(X) = \frac{n-1}{n-3}\frac{s^2}{n}\,,$$

gdje je očekivanje $E(X)$ definirano samo za $n > 2$, a varijancija $V(X)$ samo za $n > 3$. Za $n > 3$ najbolja procjena veličine X i njezina pridružena nesigurnost prema tomu su jednaki:

$$x = \bar{x}\,, \quad u(x) = \sqrt{\frac{n-1}{n-3}}\frac{s}{\sqrt{n}}\,. \tag{13}$$

NAPOMENA 1.: U GUM-u [GUM:1995, 4.2] standardna nesigurnost $u(x)$ pridružena prosječnoj vrijednosti niza od n neovisnih pokazivanja određuje se kao $u(x) = s/\sqrt{n}$, a ne iz formule (13), a pridruženi broj stupnjeva slobode $\nu = n - 1$ smatra se mjerom pouzdanosti nesigurnosti $u(x)$. Proširenjem toga rasuđivanja, nesigurnosti dobivenoj iz određivanja B-vrste koje se temelji na subjektivnoj prosudbi pouzdanosti određivanja [GUM:1995, G.4.2] (vidi podtočku 6.4.3.3 napomena 2.) pridružuje se neki broj stupnjeva slobode. Da bi se primjenom Welch-Satterthwaiteove formule dobio stvarni broj stupnjeva slobode ν_{eff} pridružen nesigurnosti $u(y)$, potrebni su brojevi stupnjeva slobode pridruženi nesigurnostima $u(x_i)$.

NAPOMENA 2.: U Bayesovu kontekstu ove dopune nisu nužni pojmovi kao što su pouzdanost ili nesigurnost nesigurnosti. U skladu s tim broj stupnjeva slobode pri određivanju nesigurnosti A-vrste ne smatra se više mjerom pouzdanosti, a broj stupnjeva slobode pri određivanju nesigurnosti B-vrste ne postoji.

6.4.9.5 Za uzorkovanje iz razdiobe $t_\nu(\bar{x}, s^2/n)$ iz usredištene t-razdiobe t_ν s $\nu = n - 1$ stupnjeva slobode provede se izvlačenje vrijednosti t [GUM:1995, G.3] (vidi podtočku C.6) i formira izraz:

$$\xi = \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}}\, t\,.$$

6.4.9.6 Ako se umjesto standardnog odstupanja s izračunana iz jednog niza pokazivanja, upotrebljava zbirno standardno odstupanje s_{p} s brojem stupnjeva slobode ν_{p} dobivenim iz takvih Q skupova:

$$s_{\mathrm{p}}^2 = \frac{1}{\nu_p}\sum_{j=1}^{Q} \upsilon_j s_j^2, \quad \nu_p = \sum_{j=1}^{Q} \upsilon_j$$

broj stupnjeva slobode $\nu = n - 1$ normalizirane i neusredištene t-razdiobe dodijeljene veličini X treba zamijeniti brojem stupnjeva slobode ν_{p} koji je pridružen zbirnom standardnom odstupanju s_{p}. Posljedica je toga da formulu (12) treba zamijeniti formulom:

$$g_X(\xi) = \frac{\Gamma((\nu_{\mathrm{p}}+1)/2)}{\Gamma(\nu_{\mathrm{p}}/2)\sqrt{\nu_{\mathrm{p}}\,\pi}} \times \frac{1}{s_{\mathrm{p}}/\sqrt{n}} \left[1 + \frac{1}{\nu_{\mathrm{p}}}\left(\frac{\xi - \bar{x}}{s_{\mathrm{p}}/\sqrt{n}}\right)^2\right]^{-(\nu_{\mathrm{p}}+1)/2}$$

a izraze (13) izrazima:

$$x = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad u(x) = \sqrt{\frac{\nu_{\mathrm{p}}}{\nu_{\mathrm{p}} - 2}}\,\frac{s_{\mathrm{p}}}{\sqrt{n}} \quad (\nu_{\mathrm{p}} \geq 3)$$

6.4.9.7 Ako je izvor podataka o veličini X potvrda o umjeravanju [GUM:1995, 4.3.1] u kojoj su utvrđeni najbolja procjena x, povećana nesigurnost U_{p}, faktor pokrivanja k_{p} i stvarni broj stupnjeva slobode ν_{eff}, tada veličini X treba biti dodijeljena normalizirana i neusredištena t-razdioba $t_\nu(x, (U_{\mathrm{p}}/k_{\mathrm{p}})^2)$ s $\nu = \nu_{\mathrm{eff}}$ stupnjeva slobode.

6.4.9.8 Ako je utvrđeno da je stvarni broj stupnjeva slobode ν_{eff} beskonačan ili ako nije specificirano u kojemu bi se slučaju u nedostatku drugih podataka uzimalo da je beskonačan, veličini X bi se dodijelila Gaussova razdioba $\mathrm{N}(x, (U_{\mathrm{p}}/k_{\mathrm{p}})^2)$ (vidi podtočku 6.4.7.1).

NAPOMENA: Ta je razdioba granični slučaj normalizirane i neusredištene t-razdiobe $t_\nu(x, (U_{\mathrm{p}}/k_{\mathrm{p}})^2)$ kad ν teži beskonačno.

6.4.10 Eksponencijalne razdiobe

6.4.10.1 Kad su jedini raspoloživi podatci koji se odnose na nenegativnu veličinu X najbolja procjena $x > 0$ te veličine X, tada bi se u skladu s načelom najveće entropije veličini X dodijelila eksponencijalna razdioba $\mathrm{Ex}(1/x)$.

6.4.10.2 Funkcija gustoće vjerojatnosti veličine X jednaka je:

$$g_X(\xi) = \begin{cases} \exp(-\xi/x)/x & \xi \geq 0, \\ 0, & \text{u ostalim slučajevima,} \end{cases}$$

6.4.10.3 Veličina X ima očekivanje i varijanciju:

$$E(X) = x,\ V(X) = x^2.$$

6.4.10.4 Za uzorkovanje iz razdiobe $\mathrm{Ex}(1/x)$, iz standardne pravokutne razdiobe $\mathrm{R}(0, 1)$ izvuče se broj r (vidi podtočku C.3.3) i formira izraz:

$$\xi = -x \ln r.$$

NAPOMENA: Dostupni su dodatni podatci koji se odnose na dodjelu funkcije gustoće vjerojatnosti nenegativnim veličinama [14].

6.4.11 Gama-razdiobe

6.4.11.1 Pretpostavimo da veličina X predstavlja prosječni broj predmeta koji postoje u uzorku stalne veličine (npr. prosječni broj čestica u uzorku zraka uzetu iz čiste sobe ili prosječni broj fotona koje emitira izvor u specificiranomu vremenskom odsječku). Pretpostavimo da je q broj predmeta izbrojenih u uzorku specificirane veličine, a za taj se broj smatra da je veličina koja ima Poissonovu razdiobu s nepoznatim očekivanjem. Tada bi u skladu s Bayesovim teoremom nakon dodjele očekivanju stalne apriorne razdiobe, veličini X bila dodijeljena gama-razdioba G(q +1, 1).

6.4.11.2 Funkcija gustoće vjerojatnosti veličine X jednaka je:

$$g_X(\xi) = \begin{cases} \xi^q \exp(-\xi)/q! & \xi \geq 0, \\ 0, & \text{u ostalim slučajevima,} \end{cases} \tag{14}$$

6.4.11.3 Veličina X ima očekivanje i varijanciju:

$$E(X) = q + 1, \quad V(X) = q + 1 \tag{15}$$

6.4.11.4 Za uzorkovanje iz razdiobe G(q + 1, 1), iz standardne pravokutne razdiobe R(0, 1) (vidi podtočku C.3.3) provede se q + 1 neovisnih izvlačenja brojeva r_i, i = 1, …, q + 1 i formira izraz [18]:

$$\xi = -\ln \prod_{i=1}^{q+1} r_i.$$

NAPOMENA 1.: Ako se brojenje provodi na nekoliko uzoraka (u skladu s istom Poissonovom razdiobom), i ako je q_i broj predmeta izbrojenih u i-tom uzorku veličine S_i, tada je razdioba prosječnoga broja predmeta u uzorku veličine $S = \sum_i S_i$ jednaka G(α, β) s $\alpha = 1 + \sum_i q_i$, i $\beta = 1$. Primjenjuju se formule (14) i (15) s $q = \sum_i q_i$.

NAPOMENA 2.: Gama-razdioba poopćenje je χ^2-razdiobe i upotrebljava se za opis podataka pridruženih varijancijama.

NAPOMENA 3.: Posebna je gama-razdioba u podtočki 6.4.11.4 Erlangova razdioba dana brojem q + 1 eksponencijalnih razdioba s parametrom 1 [18].

6.5 Razdiobe vjerojatnosti iz prijašnjih izračuna nesigurnosti

Prethodnim izračunom nesigurnosti može se dobiti razdioba vjerojatnosti izlazne veličine koja treba postati ulazna veličina za daljnji izračun nesigurnosti. Ta razdioba vjerojatnosti može postojati u prepoznatljivu analitičkomu obliku, npr. kao Gaussova funkcija gustoće vjerojatnosti. Ona naprimjer može postojati kao aproksimacija funkcije razdiobe za veličinu dobivenu iz prijašnje primjene funkcije gustoće vjerojatnosti. U podtočkama 7.5.1 i D.2 dani su načini za opis takve funkcije razdiobe neke veličine.

7 Implementacija metode monte karlo

7.1 Općenito

Ova točka daje podatke o primjeni metode monte karlo za prijenos razdioba: vidi postupak dan u podtočki 5.9.6 i prikazan dijagramom na slici 4.

7.2 Broj pokusa monte karlo

7.2.1 Potrebno je odabrati vrijednost M, broj pokusa monte karlo, tj. broj određivanja vrijednosti modela koje treba provesti. On se može odabrati *apriori*, pri čemu se neće izravno upravljati kakvoćom brojčanih rezultata koji se dobivaju metodom monte karlo. Tomu je razlog što će broj pokusa koji su potrebni za dobivanje tih rezultata s propisanim dopuštenim brojčanim odstupanjem ovisiti o "obliku" funkcije gustoće vjerojatnosti izlazne veličine i o zahtijevanoj vjerojatnosti pokrivanja. Izračuni su također stohastičke naravi jer se temelje na slučajnomu uzorkovanju.

NAPOMENA: Može se očekivati da će vrijednost $M = 10^6$ često dati interval pokrivanja s razinom povjerenja od 95 % za izlaznu veličinu, tako da ta duljina ima stupanj približenja od jedne ili dvije značljive desetične znamenke.

7.2.2 Broj M treba odabrati tako da bude velik u usporedbi s vrijednošću $1/(1-p)$, npr. M koji bi bio barem 10^4 puta veći od $1/(1-p)$. Tada se može očekivati da će $\boldsymbol{G}$ dati prihvatljiv diskretni prikaz funkcije razdiobe $G_Y(\eta)$ izlazne veličine Y u područjima u blizini graničnih točaka intervala povjerenja s razinom povjerenja od $100p$ %.

7.2.3 Budući da se ne može jamčiti da će taj ili bilo koji posebni unaprijed specificirani broj biti dostatan, može se upotrebljavati postupak adaptivnog odabira broja M, tj. postupnoga povećavanja broja pokusa. Za to postoje određene upute [2]. U podtočki 7.9 dan je takav postupak, čije je svojstvo da je broj pokusa ekonomski konzistentan s očekivanjem da se postigne zahtijevano brojčano dopušteno odstupanje.

NAPOMENA: Ako je model složen, npr. ako uključuje rješenje modela konačnih elemenata zbog velikih vremena izračunavanja, ne mora biti moguće upotrijebiti dostatno velik broj pokusa M kako bi se dobilo odgovarajuće znanje o razdiobi vrijednosti izlazne veličine. U tom bi slučaju približni pristup bio da se funkcija gustoće vjerojatnosti $g_Y(\eta)$ smatra Gaussovom (kao u GUM-u) te da se postupak nastavi na sljedeći način. Upotrebljavao bi se razmjerno malen broj pokusa M, naprimjer 50 ili 100. Kao procjena y i standardna nesigurnost $u(y)$ uzeli bi se redom prosječna vrijednost i standardno odstupanje dobiveni iz M vrijednosti izlazne veličine Y. Na temelju tih podataka izlaznoj veličini Y dodijelila bi se Gaussova funkcija gustoće vjerojatnosti $g_Y(\eta) = \mathrm{N}(y, u^2(y))$ (vidi podtočku 6.4.7) kojom bi se opisalo znanje o toj veličini i izračunao željeni interval pokrivanja za tu veličinu. Premda je uporaba manjega broja pokusa M nužno manje pouzdana od uporabe većega broja pokusa time što ne daje aproksimaciju funkcije gustoće vjerojatnosti izlazne veličine Y, njome se uzima u obzir nelinearnost modela.

7.3 Uzorkovanje iz razdioba vjerojatnosti

Pri primjeni postupka monte karlo, iz funkcija gustoće vjerojatnosti $g_{X_i}(\xi_i)$ izvlači se M vektora $\boldsymbol{x}_r$, $r = 1, ..., M$ (vidi podtočku 7.2) za N vrijednosti ulaznih veličina X_i. Izvlačenja bi se, ako je to prikladno, provodila iz zajedničke (višedimenzijske) funkcije gustoće vjerojatnosti $g_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\xi})$. U dodatku C daju se preporuke koje se odnose na način na koji se to uzorkovanje može provesti za najuobičajenije razdiobe, tj. pravokutnu, Gaussovu, t-razdiobu i višedimenzijsku Gaussovu razdiobu. Vidi također podtočku 6.4. Moguće je slučajno izvlačenje iz svake druge razdiobe. Vidi podtočku C.2. Neke druge razdiobe mogle bi biti aproksimacije razdioba koje se temelje na rezultatima monte karlo iz prijašnjih izračuna nesigurnosti (vidi podtočke 6.5 i 7.5 i dodatak D).

NAPOMENA: Da bi rezultati simulacije monte karlo bili statistički valjani, generatori pseudoslučajnih brojeva koji se upotrebljavaju za uzorkovanje iz zahtijevanih razdioba trebaju imati odgovarajuća svojstva. Neka ispitivanja slučajnosti brojeva koje daje generator prikazana su u podtočki C.3.2.

7.4 Vrednovanje modela

7.4.1 Vrijednosti modela određuju se za svaki od M uzoraka iz funkcija gustoće vjerojatnosti za vrijednosti od N ulaznih veličina. Posebno označimo M uzoraka s $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_M$, gdje r-ti uzorak $\boldsymbol{x}_r$ sadržava vrijednosti $x_{1,r}, \ldots, x_{N,r}$ s uzorkom $x_{i,r}$ "izvučenim" iz funkcije gustoće vjerojatnosti veličine X_i. Tada su vrijednosti modela:

$$y_r = f(\boldsymbol{x}_r),\ r = 1, ..., M.$$

7.4.2 Potrebne se preinake provode prema podtočki 7.4.1 ako izlazne veličine X_i nisu neovisne te im je prema tomu dodijeljena zajednička funkcija gustoće vjerojatnosti.

NAPOMENA: Pri primjeni zakona prijenosa nesigurnosti provode se određivanja vrijednosti modela i derivacija uporabom točnih derivacija u najboljim procjenama ulaznih veličina po redu. Određivanja modela provode se samo kad se primjenjuje zakon prijenosa nesigurnosti kad se upotrebljavaju numeričke aproksimacije derivacija (metodom konačnih razlika). Kad se prihvati preporuka GUM-a [GUM:1995, 5.1.3, napomena 2] ta se određivanja provode u najboljim procjenama ulaznih veličina i u točkama pomaknutim za ± jednu standardnu nesigurnost od procjene vrijednosti svake od ulaznih veličina. Pri primjeni metode monte karlo određivanja vrijednosti modela provode se u blizini tih najboljih procjena, tj. u točkama za koje se očekuje da će dati nekoliko standardnih odstupanja udaljene od tih procjena. Iz činjenice da se određivanja vrijednosti modela provode u skladu s upotrijebljenim pristupom u različitim točkama mogu se pojaviti neka pitanja s obzirom na numerički postupak koji se upotrebljava za određivanje modela, npr. osiguravanje njegove konvergencije (gdje se upotrebljavaju iterativne sheme) i numeričke stabilnosti. Korisnik po potrebi treba osigurati da numeričke metode koje se upotrebljavaju za određivanje vrijednosti modela f budu valjane za dostatno široko područje koje sadržava te procjene. Samo se povremeno može očekivati da bi taj aspekt bio kritičan.

7.5 Diskretni prikaz funkcije razdiobe izlazne veličine

7.5.1 Diskretni prikaz $\boldsymbol{G}$ funkcije razdiobe $G_Y(\eta)$ izlazne veličine Y može se dobiti na sljedeći način:

a) vrijednosti y_r, $r = 1, ..., M$, izlazne veličine dobivene metodom monte karlo razvrstavaju se nepadajućim redom. Označite sortirane vrijednosti s $y_{(r)}$, $r = 1, ..., M$;

b) po potrebi provedu se male brojčane poremećaje za svaku repliku vrijednosti modela $y_{(r)}$, tako da dobiveni potpuni skup $y_{(r)}$, $r = 1, ..., M$ čini strogo rastući niz (vidi uvjet b) u podtočki 5.10.1);

c) kao prikaz $\boldsymbol{G}$ uzima se skup vrijednosti modela $y_{(r)}$, $r = 1, ..., M$.

NAPOMENA 1.: Što se tiče koraka a) treba upotrebljavati algoritam razvrstavanja s brojem operacija koji je razmjeran $M\log M$ [47]. Za obični bi algoritam bilo potrebno vrijeme razmjerno M^2, čime bi vrijeme računanja postalo nepotrebno dugo. Vidi podtočku 7.8.

NAPOMENA 2.: U koraku a) upotrebljava se naziv "nepadajuća", a ne "rastuća" zbog mogućih jednakosti između vrijednosti y_r.

NAPOMENA 3.: Provedba malih poremećaja u koraku b) osigurat će da se zadrže statistička svojstva razvrstanih vrijednosti modela $y_{(r)}$.

NAPOMENA 4.: Nije veoma vjerojatno da će u koraku b) biti nužne poremećaje zbog veoma velikoga broja različitih brojeva s plivajućom zarezom koji se mogu dobiti iz vrijednosti modela generiranih iz ulaznih veličina dobivenih kao izvlačenja iz generatora slučajnih brzojava. Ipak bi se primjenom ispravne programske podrške postiglo prikladno osiguranje.

NAPOMENA 5.: Što se tiče koraka c) iz diskretnoga prikaza $\boldsymbol{G}$ mogu se izvesti različiti podatci. Posebno se uz očekivanje i standardno odstupanje mogu dobiti dopunski podatci kao što su mjere skošenosti i asimetrije i druge statistike kao što su mod i medijana.

NAPOMENA 6.: Ako veličina Y postaje ulazna veličina za daljnji izračun nesigurnosti, uzorkovanje iz njezine razdiobe vjerojatnosti lako se provodi slučajnim izvlačenjem iz razvrstanih vrijednosti modela $y_{(r)}$, $r = 1, ..., M$, s istom vjerojatnošću (vidi podtočku 6.5).

7.5.2 Vrijednosti $y_{(r)}$ (ili y_r) kad se sastave u histogram (s odgovarajućim širinama stupića) čine frekvencijsku razdiobu koja kad se normira da bi imala jediničnu ploštinu daje aproksimaciju funkcije gustoće vjerojatnosti $g_Y(\eta)$ izlazne veličine Y. Izračuni se općenito ne provode s pomoću toga histograma čije razlučivanje ovisi o odabiru širine stupića, nego s pomoću aproksimacije $\boldsymbol{G}$ funkcije razdiobe. Histogram međutim može biti koristan kao pomagalo za razumijevanje naravi funkcije gustoće vjerojatnosti, npr. mjere njezine simetrije. Kad se radi o velikome broju M vidi međutim podtočku 7.8.3 napomenu 1.

7.5.3 Katkad je korisna aproksimacija funkcije razdiobe $G_Y(\eta)$ neprekidnom funkcijom. U dodatku D daju se načini za dobivanje takve aproksimacije.

7.6 Procjena vrijednosti izlazne veličine i njoj pridružene standardne nesigurnosti

Prosječna vrijednost:

$$\tilde{y} = \frac{1}{M}\sum_{r=1}^{M} y_r \tag{16}$$

i standardno odstupanje $u(\tilde{y})$ odnosno iz izraza:

$$u^2(\tilde{y}) = \frac{1}{M-1}\sum_{r=1}^{M}(y_r - \tilde{y})^2 \tag{17}$$

uzimaju se redom kao procjena y izlazne veličine Y i standardna nesigurnost $u(y)$ pridružena toj procjeni.

NAPOMENA 1.: Treba upotrebljavati formulu (17), a ne matematički istovrijednu formulu:

$$u^2(\tilde{y}) = \frac{M}{M-1}\left(\frac{1}{M}\sum_{r=1}^{M} y_r^2 - \tilde{y}^2\right).$$

U mnogim slučajevima u mjeriteljstvu u kojima je $u(y)$ mnogo manje od $|y|$ (pri čemu vrijednosti y_r imaju određeni broj zajedničkih vodećih znamenaka) u posljednjoj formuli može doći do numeričkoga poništenja oduzimanjem (koje uključuju srednju vrijednost kvadrata manje kvadrat srednje vrijednosti). Taj učinak može biti tako ozbiljan da dobivena vrijednost može imati premalo ispravnih značljivih desetičnih znamenaka da bi određivanje nesigurnosti bilo valjano [4].

NAPOMENA 2.: U određenim posebnim okolnostima kad je npr. jednoj od ulaznih veličina dodijeljena funkcija gustoće vjerojatnosti koja se temelji na t-razdiobi s manje od tri stupnja slobode, očekivanje i standardno odstupanje izlazne veličine Y opisane funkcijom gustoće vjerojatnosti $g_Y(\eta)$ ne moraju postojati. Formule (16) i (17) ne moraju tada osiguravati smislene rezultate. Može se međutim formirati interval pokrivanja za izlaznu veličinu Y (vidi podtočku 7.7) jer prikaz $\boldsymbol{G}$ ima smisla i može se odrediti.

NAPOMENA 3.: Procjena $\tilde{y}$ neće se općenito slagati s modelom određenim u najboljim procjenama ulaznih veličina jer je za nelinearni model $f(\boldsymbol{X})$, $E(Y) = E(f(\boldsymbol{X})) \neq f(E(\boldsymbol{X}))$ (vidi [GUM:1995, 4.1.4]). Bez obzira na to je li f linearna ili nelinearna funkcija, u graničnome slučaju kad M teži beskonačnosti, procjena $\tilde{y}$ približava se $E(f(\boldsymbol{X}))$ kad $E(f(\boldsymbol{X}))$ postoji.

7.7 Interval pokrivanja za vrijednost izlazne veličine

7.7.1 Interval pokrivanja veličine Y može se odrediti iz diskretnoga prikaza $\boldsymbol{G}$ funkcije razdiobe $G_Y(\eta)$ na način sličan onomu u podtočki 5.3.2 za dano $G_Y(\eta)$.

7.7.2 Neka je $q = pM$ ako je pM cijeli broj. U protivnome uzimamo da je q cjelobrojni dio broja $pM + ½$. Tada je $[y_{\text{low}}, y_{\text{high}}]$ interval pokrivanja veličine Y s razinom pokrivanja od $100p$ %, pri čemu je za svako $r = 1, \ldots, M - q$, $y_{\text{low}} = y_{(r)}$ i $y_{\text{high}} = y_{(r+q)}$. Vjerojatnosno simetričan interval pokrivanja s razinom pokrivanja od $100p$ % dobiva se tako da se uzme $r = (M - q)/2$ ako je $(M - q)/2$ cijeli broj ili u protivnome da je jednako cjelobrojnomu dijelu broja $(M - q + 1)/2$. Najkraći interval pokrivanja s razinom pokrivanja od $100p$ % dobiva se tako da se odredi broj r^* takav da za $r = 1, \ldots, M - q$, bude $y_{(r^*+q)} - y_{(r^*)} \le y_{(r+q)} - y_{(r)}$.

NAPOMENA: Zbog slučajnog karaktera metode monte karlo neki od tih $M - q$ intervala bit će kraći, a neki dulji od prosjeka. Na taj se način odabirom najmanje takve duljine, najkraći interval pokrivanja (aproksimacija) s razinom pokrivanja od $100p$ % može postati neznatno kraći od intervala koji bi se izračunalo iz funkcije razdiobe $G_Y(\eta)$, što ima za posljedicu da je tipična vjerojatnost pokrivanja manja od $100p$ %. Za veliko M ta je vjerojatnost pokrivanja zanemarivo manja od $100p$ %.

PRIMJER: Iz generatora pseudoslučajnih brojeva izvučeno je 10^5 brojeva za pravokutnu razdiobu u odsječku [0, 1], a najkraći je interval pokrivanja s razinom pokrivanja od 95 % formiran prema prethodnom opisu. Taj se postupak provodi 1000 puta. Prosječna vjerojatnost pokrivanja bila je 94,92 %, a standardno odstupanje od 1000 vjerojatnosti pokrivanja bilo je 0,06 %.

7.8 Vrijeme izračunavanja

7.8.1 Najveći dio vremena koje je potrebno za izračunavanja metodom monte karlo troši se za sljedeća tri koraka:

a) uzimanje M uzoraka iz funkcije gustoće vjerojatnosti za svaku ulaznu veličinu X_i (ili zajedničku funkciju gustoće vjerojatnosti za $\boldsymbol{X}$);

b) određivanje M odgovarajućih vrijednosti modela;

c) razvrstavanje M dobivenih vrijednosti modela nepadajućim redom.

7.8.2 Vrijeme potrebno za ta tri koraka izravno je razmjerno (a) M, (b) M i (c) $M \log M$ (ako se upotrebljava djelotvoran postupak razvrstavanja [47]).

7.8.3 Ako je model jednostavan i ulazne veličine neovisne, najviše se vremena troši u koraku c) i sveukupno potrebno vrijeme obično iznosi nekoliko sekunda za broj pokusa $M = 10^6$ na osobnome računalu koje radi na nekoliko GHz. Inače neka je T_1 vrijeme potrebno za izvlačenje jednog uzorka iz funkcije gustoće vjerojatnosti za ulazne veličine, a T_2 vrijeme potrebno da se odredi jedna vrijednost za model. Tada se može uzeti da je sveukupno vrijeme u biti jednako $M \times (T_1 + T_2)$, pri čemu, ako je model složen, prevladava član MT_2.

NAPOMENA 1.: Ako je model jednostavan, a M veoma veliko, npr. 10^8 ili 10^9, vrijeme razvrstavanja može biti preveliko u usporedbi s vremenom potrebnim za određivanje M vrijednosti modela. U tom se slučaju izračuni mogu temeljiti na aproksimaciji funkcije gustoće vjerojatnosti $g_Y(\eta)$ izvedene iz prikladnog histograma y_r.

NAPOMENA 2.: Vrijeme izračunavanja koje se zahtijeva za izračun metodom monte karlo može se dobiti na sljedeći način. Promatrajmo zamišljeni problem s modelom koji se sastoji od zbroja od pet članova:

$$Y = \cos X_1 + \sin X_2 + \tan^{-1} X_3 + \exp(X_4) + X_5^{1/3}.$$

Svakoj ulaznoj veličini X_i dodijeli se Gaussova funkcija gustoće vjerojatnosti. Izvede se $M = 10^6$ pokusa monte karlo. Relativna vremena izračuna za:

a) generiranje $5M$ slučajnih Gaussovih brojeva,

b) formiranje M vrijednosti modela i

c) razvrstavanje M vrijednosti modela bila su redom 20 %, 20 % i 60 % s ukupnim vremenom izračuna od nekoliko sekunda na osobnome računalu koje radi na nekoliko GHz.

7.9 Adaptivni postupak monte karlo

7.9.1 Općenito

Primjena adaptivnoga postupka monte karlo temelji se na provedbi većega broja pokusa monte karlo dok se ne stabiliziraju različiti rezultati koji su zanimljivi u statističkom smislu. Smatra se da je neki brojčani rezultat stabiliziran ako je njemu pridruženo dvostruko standardno odstupanje manje od dopuštenoga brojčanog odstupanja (vidi podtočku 7.9.2) pridružena standardnoj nesigurnosti $u(y)$.

7.9.2 Brojčana dopuštena odstupanja pridružena brojčanoj vrijednosti

Neka n_{dig} označuje broj značljivih desetičnih znamenaka koje se smatraju prihvatljivim u brojčanoj vrijednosti z. Brojčano dopušteno odstupanje δ pridruženo broju z daje se na sljedeći način:

a) broj z izrazi se u obliku $c \times 10^{\ell}$, gdje je c neki cijeli broj s n_{dig} desetičnih znamenaka, a ℓ cijeli broj i

b) uzme

$$\delta = \frac{1}{2}\, 10^{\ell} \tag{18}$$

PRIMJER 1.: Procjena izlazne veličine za mjerni etalon mase nazivne vrijednosti od 100 g [GUM;1995, 7.2.2] jednaka je y = 100,021 47 g. Standardna nesigurnost $u(y)$ = 0,000 35 g, obje značljive se znamenke smatraju prihvatljivima. Prema tomu je $n_{\mathrm{dig}} = 2$, a $u(y)$ može se izraziti kao 35×10^{-5} te je tako $c = 35$, a $\ell = -5$. Uzimamo $\delta = \frac{1}{2} \times 10^{-5}$ = 0,000 005 g.

PRIMJER 2.: Kao primjer 1. osim što se u nesigurnosti $u(y)$ smatra značljivom samo jedna desetična znamenka. Prema tomu je $n_{\mathrm{dig}} = 1$, a $u(y)$ = 0,0004 g = 4×10^{-4} g daje $c = 4$, a $\ell = -4$. Prema tomu je $\delta = \frac{1}{2} \times 10^{-4}$ = 0,000 05 g.

PRIMJER 3.: Pri mjerenju temperature $u(y)$ = 2 K. Tada je $n_{\mathrm{dig}} = 1$, a $u(y) = 2 \times 10^0$, što daje $c = 2$, a $\ell = 0$. Prema tomu je $\delta = \frac{1}{2} \times 10^0$ K = 0,5 K.

7.9.3 Cilj adaptivnoga pristupa

Cilj je adaptivnoga postupka danog u podtočki 7.9.4 da se dadne

a) procjena y izlazne veličine Y,

b) pridružena standardna nesigurnost $u(y)$ i

c) krajnje točke y_{low} i y_{high} intervala pokrivanja izlazne veličine Y koji odgovara dogovorenoj vjerojatnosti pokrivanja, tako da se za svaku od tih četiriju vrijednosti može očekivati da zadovoljava zahtijevana brojčana dopuštena odstupanja.

NAPOMENA 1.: Zbog njegove stohastičke naravi ne može se jamčiti da će taj postupak dati takav interval.

NAPOMENA 2.: Procjena y i nesigurnost $u(y)$ općenito "konvergiraju" znatno brže nego y_{low} i y_{high} u odnosu na broj pokusa monte karlo.

NAPOMENA 3.: Općenito, što je veća vjerojatnost pokrivanja, to se za dano brojčano dopušteno odstupanje za određivanje krajnjih vrijednosti y_{low} i y_{high} zahtijeva veći broj pokusa monte karlo.

7.9.4 Adaptivni postupak

Praktični je pristup koji uključuje provedbu niza primjena metode monte karlo sljedeći:

a) za n_{dig} odabere se prikladan mali pozitivni cijeli broj (vidi podtočku 7.9.2)

b) odabere se

$$M = \max(J, 10^4)$$

gdje je J najmanji cijeli broj veći od $100/(1 - p)$ ili jednak tomu broju

c) odabere se $h = 1$, koji označuje prvu primjenu metode monte karlo u nizu

d) provede se M pokusa metodom monte karlo kao u podtočki 7.3 i 7.4

e) iz tako dobivenih M vrijednosti modela $y_1, \ldots, y_M$ izračunavaju se, kao u podtočkama 7.5 – 7.7, $y^{(h)}$, $u(y^{(h)})$, $y_{low}^{(h)}$ i $y_{high}^{(h)}$ redom za h-ti broj u nizu kao procjena izlazne veličine Y, pridružena standardna nesigurnost te lijeva i desna krajnja točka intervala pokrivanja s razinom pokrivanja od $100p$ %.

f) ako je $h = 1$, h se poveća za jedan i vraća se na korak d)

g) izračuna se standardno odstupanje s_y pridruženo prosječnoj vrijednosti procjena $y^{(1)}, \ldots, y^{(h)}$ izlazne veličine Y dano izrazom:

$$s_y^2 = \frac{1}{h(h-1)} \sum_{r=1}^{h} (y^{(r)} - y)^2 ,$$

gdje je

$$y = \frac{1}{h} \sum_{r=1}^{h} y^{(r)} ;$$

h) izračuna se odgovarajuća statistika za $u(y)$, y_{low} i y_{high}.

i) za oblikovanje $u(y)$ upotrijebe se sve $h \times M$ vrijednosti modela koje postoje

j) izračunaju se brojčana dopuštena odstupanja δ pridružena nesigurnosti $u(y)$ kao u podtočki 7.9.2

k) ako neke od vrijednosti od $2s_y$, $2s_{u(y)}$, $2s_{y_{low}}$ i $2s_{y_{high}}$ prelaze δ broj h poveća se h za jedan i vraća se na korak d)

l) smatra se da su se sva izračunavanja stabilizirala te se upotrijebe sve $h \times M$ vrijednosti modela za izračun procjene y, nesigurnosti $u(y)$ i intervala pokrivanja s razinom pokrivanja od $100p$ % kao u podtočkama 7.5–7.7.

NAPOMENA 1.: Normalno bi se u koraku a) n_{dig} odabralo tako da bude jednako 1 ili 2.

NAPOMENA 2.: Odabir broja pokusa M u koraku b) navoljan je, ali treba biti prikladan u praksi.

NAPOMENA 3.: U koraku g) procjena y može se smatrati ostvarenjem slučajne varijable sa standardnim odstupanjem s_y.

NAPOMENA 4.: Standardna odstupanja formirana u koracima g) i h) smanjuju se razmjerno $h^{-1/2}$ [vidi podtočku 5.9.6 napomenu 2].

NAPOMENA 5.: U situacijama gdje se ne zahtijeva interval pokrivanja, ispitivanje zbog stabilizacije izračuna u koraku k) može se međutim temeljiti samo na $2s_y$ ili $2s_{u(y)}$.

NAPOMENA 6.: Faktor 2 koji se upotrebljava u koraku k) temelji se samo na razmatranju prosjeka kao ostvarenja Gaussovih varijabla i odgovara vjerojatnosti pokrivanja od približno 95 %.

NAPOMENA 7.: Alternativni neadaptivni pristup za vjerojatnosno simetričan interval pokrivanja s razinom pokrivanja od 95 % koji se može dobiti uporabom statistike binomne razdiobe [10] je sljedeći. Odabere se $M = 10^5$ ili $M = 10^6$. Formira se interval $[y_{(r)}, y_{(s)}]$ pri čemu je za $M = 10^5$, $r = 2420$ i $s = 97\,581$ ili za $M = 10^6$, $r = 24747$ i $s = 975\,254$. Taj je interval statistički interval pokrivanja s razinom pokrivanja od 95 % na razini povjerenja od 0,99 [GUM:1995, C.2.30] [55], tj. vjerojatnost pokrivanja neće biti manja do 95 % u barem 99 % uporaba metode monte karlo. Taj se rezultat može utvrditi uporabom statistika binomne razdiobe [10]. Prosječna vjerojatnost pokrivanja takvog intervala bit će $(s - r)/(M + 1)$, što je veće od 95 %, pri čemu se ta vrijednost smanjuje s porastom broja M, tj. jednaka je 95,16 % za $M = 10^5$ i 95,05 % za $M = 10^6$. (Postoje druge mogućnosti za r i s; njih ne treba pribrajati broju $M + 1$. Dostatan je uvjet [10, odsječak 2.6] da $s - r$ zadovoljava izraz:

$$\sum_{j=s-r}^{M} {}^{M}C_j\, p^j (1-p)^{M-j} < 1 - 0{,}99 \,,$$

gdje je

$${}^{M}C_j = \frac{M!}{j!(M-j)!} \,,$$

najbolji rezultat koji se dobiva upravo kad je zadovoljena ta nejednadžba.) Ti se rezultati mogu proširiti na druge vjerojatnosti pokrivanja (i drugi odabir broja pokusa M).

8 Validacija rezultata

8.1 Validacija okvira nesigurnosti GUM-a uporabom metode monte karlo

8.1.1 Za okvir nesigurnosti GUM-a može se očekivati da će funkcionirati dobro u mnogim okolnostima. Međutim nije uvijek moguće izravno odrediti jesu li ispunjeni svi uvjeti za njegovu primjenu (vidi podtočke 5.7 i 5.8). Doista, pri tom je stupanj poteškoća u tipičnome slučaju znatno veći nego što se to zahtijeva za primjenu metode monte karlo pod pretpostavkom da postoji prikladna programska podrška [8]. Prema tomu, budući da se te okolnosti ne mogu lako ispitati, svi bi se sumnjivi slučajevi trebali validirati. Budući da je područje valjanosti metode monte karlo šire od onog za okvir nesigurnosti GUM-a, preporučuje se da se primjenjuju i okvir nesigurnosti GUM-a i metoda monte karlo te da se rezultati uspoređuju. Da bi usporedba bila zadovoljavajuća u tome se slučaju i za dostatno slične probleme u budućnosti može upotrebljavati okvir nesigurnosti GUM-a. Inače umjesto toga trebalo bi razmotriti uporabu metode monte karlo ili drugoga prikladnog pristupa.

8.1.2 Posebno se preporučuje da se provode dva koraka u nastavku i sljedeći proces usporedbe:

a) primijenite okvir nesigurnosti GUM-a (možda zakon prijenosa nesigurnosti koji se temelji na aproksimaciji višim članovima razvoja u Taylorov red) (vidi podtočku 5.6) kako bi se za izlaznu veličinu dobio interval povjerenja $y \pm U_p$ s razinom povjerenja od $100p$ %, gdje je p dogovorena vjerojatnost pokrivanja

b) primijenite adaptivni postupak monte karlo (vidi podtočku 7.9.4) za dobivanje aproksimacija standardne nesigurnosti $u(y)$ i krajnjih točaka y_{low} i y_{high} zahtijevanog (vjerojatnosno simetrična ili najkraćeg) intervala pokrivanja s razinom pokrivanja od $100p$ % za izlaznu veličinu. Vidi također podtočku 8.2.

8.1.3 Postupak usporedbe ima sljedeći cilj: utvrditi slažu li se intervali pokrivanja dobiveni s pomoću okvira nesigurnosti GUM-a i metode monte karlo u granicama dogovorenoga brojčanog odstupanja. Ta se brojčana dopuštena odstupanja procjenjuje na temelju krajnjih točaka intervala pokrivanja i odgovaraju onima danim izražavanjem standardne nesigurnosti $u(y)$ koji se smatra prihvatljivim brojem važnih desetičnih znamenaka (vidi podtočku 7.9.2). Postupak je sljedeći:

a) formira se brojčano dopušteno odstupanje δ pridruženo nesigurnosti $u(y)$ kako je opisano u podtočki 7.9.2

b) usporede se intervali pokrivanja dobiveni s pomoću okvira nesigurnosti GUM-a i metode monte karlo kako bi se odredilo je li dobiven zahtijevani broj ispravnih desetičnih znamenaka u intervalu povjerenja s pomoću okvira nesigurnosti GUM-a. Posebno treba odrediti:

$$d_{\text{low}} = |y - U_p - y_{\text{low}}| \,, \tag{19}$$

$$d_{\text{high}} = |y + U_p - y_{\text{high}}| \,, \tag{20}$$

odnosno apsolutne razlike odgovarajućih krajnjih točaka tih dvaju intervala pokrivanja. Ako d_{low} i d_{high} nisu veći od δ tada je usporedba zadovoljavajuća i okvir nesigurnosti GUM-a za taj slučaj validiran.

NAPOMENA: Odabir intervala pokrivanja od $100p$ % utjecat će na usporedbu. Prema tomu validacija se primjenjuje samo na specificiranu vjerojatnost pokrivanja p.

8.2 Dobivanje rezultata iz metode monte karlo za svrhe validacije

Da bi se dobili rezultati metodom monte karlo za svrhe validacije iz podtočke 8.1, treba provesti dostatan broj M pokusa monte karlo (vidi podtočku 7.2). Neka n_{dig} označuje broj važnih desetičnih znamenaka koje se zahtijevaju za nesigurnost $u(y)$ (vidi podtočku 7.9.1) kad se validira okvir nesigurnosti GUM-a uporabom metode monte karlo. Neka δ označuje brojčano dopušteno odstupanje pridruženo nesigurnosti $u(y)$ (vidi podtočku 7.9.2). Tada se preporučuje da se upotrebljava adaptivni postupak monte karlo (vidi podtočku 7.9.4) kako bi se metodom monte karlo dobili rezultati s brojčanim dopuštenim odstupanjima od $\delta/5$. Takvi se rezultati mogu dobiti zamjenom δ s $\delta/5$ u koraku k) toga postupka.

NAPOMENA: Može se očekivati da bi uporaba brojčanoga dopuštenog odstupanja od $\delta/5$ zahtijevala broj pokusa M reda 25 puta veći od onoga za brojčano odstupanje jednako δ. Takav broj pokusa M može predstavljati probleme za neka računala u radu s vektorima dimenzije M. U tom se slučaju izračun međutim može temeljiti na aproksimaciji gustoće razdiobe vjerojatnosti $g_Y(\eta)$ izvedene iz prikladnog histograma vrijednosti y_r, pri čemu se stupići čestoća u histogramu prilagođuju s napredovanjem postupka monte karlo. Vidi podtočku 7.8.3 napomenu 1.

9 Primjeri

9.1 Ilustracije aspekata ove dopune

9.1.1 Dani primjeri ilustriraju različite aspekte ove dopune. Oni pokazuju primjenu okvira nesigurnosti GUM-a s različitim doprinosima izvedenim iz aproksimacije članovima višeg rada razvoja u Taylorov red funkcije modela. Oni također pokazuju odgovarajuće rezultate koji se dobiju:

a) iz metode monte karlo uporabom unaprijed utvrđenih brojeva M pokusa monte karlo,

b) adaptivnim postupkom monte karlo (vidi podtočku 7.9.4) u kojem se M određuje automatski ili

c) objema metodama.

9.1.2 Neki primjeri nadalje pokazuju validiraju li se rezultati koje daje okvir nesigurnosti GUM-a rezultatima metode monte karlo danim u (b) u podtočki 9.1.1. U usporedbi metode monte karlo i okvira nesigurnosti GUM-a upotrebljava se brojčano dopušteno odstupanje δ (vidi podtočku 7.9.2) pridružena nesigurnosti $u(y)$, s δ odabranim na odgovarajući način. Rezultati monte karlo dani u (b) dobiveni su uporabom brojčanih dopuštenih odstupanja od $\delta/5$ (vidi podtočku 8.2). U nekim su slučajevima rješenja dobivena analitički za daljnju usporedbu.

9.1.3 Rezultati se općenito iskazuju na način opisan u podtočki 5.5. Međutim kako bi se olakšala usporedba rezultata dobivenih iz različitih pristupa, često se daju jedna ili dvije značljive desetične znamenke više nego što se preporučuje.

9.1.4 Za generiranje pseudoslučajnih brojeva iz pravokutne razdiobe (vidi podtočku C.3) upotrijebljen je vrtložni Mersenneov (Mersenne Twister) generator [34]. On prolazi kratko ispitivanje za pseudoslučajne brojeve izvučene iz pravokutne razdiobe [30] (vidi podtočku C.3.2) i dostupan je u MATLAB-u[1)] [36], programskom okolišu koji se upotrebljava za dobivanje rezultata u ovome dokumentu.

9.1.5 Prvi je primjer aditivni model (vidi podtočku 9.2). On pokazuje da se rezultati iz metode monte karlo slažu s onima iz primjene okvira nesigurnosti GUM-a kad su za njega ispunjeni uvjeti (kao u podtočki 5.7). Također se razmatra isti model, ali s različitim funkcijama gustoće vjerojatnosti dodijeljenim ulaznim veličinama kako bi se pokazala neka odstupanja kad nisu ispunjeni svi uvjeti.

9.1.6 Drugi je primjer (vidi podtočku 9.3) problem umjeravanja iz masenog mjeriteljstva. On pokazuje da je okvir nesigurnosti GUM-a u tom slučaju valjan samo ako su uključeni doprinosi izvedeni iz članova višeg reda aproksimacije razvojem u Taylorov red funkcije modela.

[1)] MATLAB je primjer prikladna komercijalno dostupna proizvoda. Ti su podatci dani zbog udobnosti korisnika ovoga dokumenta i nisu sastavni dio izdanja ISO-a i IEC-a.

9.1.7 Treći se primjer (vidi podtočku 9.4) bavi električnim mjerenjem. On pokazuje da funkcija gustoće vjerojatnosti izlazne veličine može biti izrazito asimetrična te da prema tomu okvir nesigurnosti GUM-a može dati neispravne rezultate čak i ako se uzmu u obzir članovi višeg reda. Obrađuju se slučajevi u kojima su ulazne veličine neovisne i u kojima nisu neovisne.

9.1.8 Četvrti je primjer (vidi podtočku 9.5) primjer iz GUM-a koji se odnosi na umjeravanje granične mjerke [GUM:1995, H.1]. U tom se primjeru tumače podatci koji se odnose na ulazne veličine modela: U skladu s tim podatcima ulaznim se veličinama dodjeljuju funkcije gustoće vjerojatnosti te se uspoređuju rezultati dobiveni u okviru nesigurnosti GUM-a i metodom monte karlo. Ta se obradba nadalje primjenjuje na izvorni model i njegovu aproksimaciju u GUM-u.

9.2 Aditivni model

9.2.1 Formuliranje

U ovom se primjeru razmatra aditivni model

$$Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \tag{21}$$

posebni slučaj generičkoga linearnog modela koji se razmatra u GUM-u za tri različita skupa funkcija gustoće vjerojatnosti $g_{X_i}(\xi_i)$ koje su dodijeljene ulaznim veličinama X_i koje se smatraju neovisnima. Veličine X_i i prema tomu izlazna veličina Y imaju dimenziju 1. Za prvi skup svaka funkcija gustoće vjerojatnosti $g_{X_i}(\xi_i)$ standardna je Gaussova funkcija gustoće vjerojatnosti (s ulaznim veličinama X_i koje imaju ništično očekivanje i jedinično standardno odstupanje). Za drugi skup svaka funkcija gustoće vjerojatnosti $g_{X_i}(\xi_i)$ pravokutna je funkcija gustoće vjerojatnosti također s veličinama X_i koje imaju ništično očekivanje i jedinično standardno odstupanje. Treći je skup istovjetan drugomu, osim što funkcija gustoće vjerojatnosti za $g_{X_4}(\xi_4)$ ima standardno odstupanje jednako deset.

NAPOMENA: Dostupni su dodatni podatci koji se odnose na aditivne modele, kao što su model (21) gdje je funkcija gustoće vjerojatnosti Gaussova ili pravokutna ili njihova kombinacija [13].

9.2.2 Normalno raspodijeljene ulazne veličine

9.2.2.1 Svakoj ulaznoj veličini X_i dodijeli se standardna Gaussova funkcija gustoće vjerojatnosti. Najbolje procjene ulaznih veličina X_i jednake su $x_i = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, s pridruženim standardnim nesigurnostima $u(x_i) = 1$.

9.2.2.2 Ti su rezultati prikazani u sažetu obliku u prvih pet stupaca tablice 2., pri čemu su rezultati dani s tri značljive znamenke kako bi se olakšala njihova usporedba (vidi podtočku 9.1.3).

NAPOMENA: Dobiven je vjerojatnosno simetričan interval pokrivanja s razinom pokrivanja od 95 %, jer je poznato da je u tom slučaju, kao i za druge slučajeve razmatrane u ovome primjeru, funkcija gustoće vjerojatnosti veličine Y simetrična.

9.2.2.3 Iz zakona prijenosa nesigurnosti [GUM:1995, 5.1.2] dobije se procjena $y = 0{,}0$ veličine Y i pridružena standardna nesigurnost $u(y) = 2{,}0$ uporabom brojčanoga dopuštenog odstupanja s dvije značljive desetične znamenke za $u(y)$ ($\delta = 0{,}05$) (vidi podtočku 5.5). Interval [−3,9; 3,9] vjerojatnosno je simetričan interval pokrivanja veličine Y s razinom pokrivanja od 95 % koji se temelji na faktoru pokrivanja od 1,96.

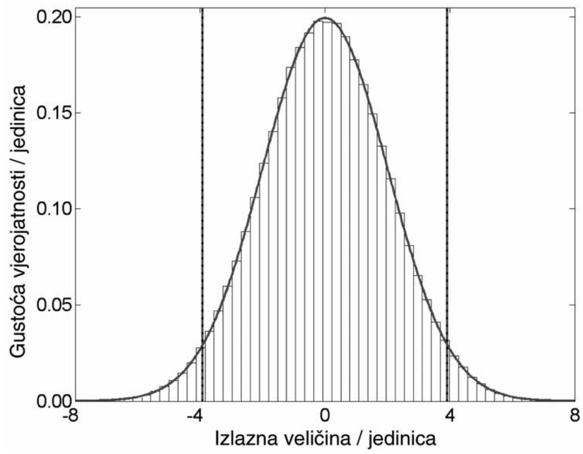
9.2.2.4 Primjena metode monte karlo (točka 7) s $M = 10^5$ pokusa daje $y = 0{,}0$, $u(y) = 2{,}0$ i vjerojatnosno simetričan interval pokrivanja [−3,9; 3,9] s razinom pokrivanja od 95 %. Dvije primjene metode s $M = 10^6$ pokusa slažu se s rezultatima u granicama upotrijebljenih brojčanih dopuštenih odstupanja. Te dvije dodatne primjene (pri čemu se provode različita slučajna uzorkovanja iz funkcija gustoće vjerojatnosti) dane su da se pokaže promjena dobivenih rezultata. Četvrta i peta brojčana vrijednost M ($1{,}23 \times 10^6$ i $1{,}02 \times 10^6$) brojevi su pokusa za dvije primjene adaptivnoga postupka monte karlo (vidi podtočku 7.9) s uporabom brojčanih dopuštenih odstupanja od $\delta/5$ (vidi podtočku 8.2).

9.2.2.5 Analitički dobivena funkcija gustoće vjerojatnosti veličine Y Gaussova je funkcija gustoće vjerojatnosti s ništičnim očekivanjem i standardnim odstupanjem jednakim 2.

9.2.2.6 Slika 6. prikazuje (Gaussovu) funkciju gustoće vjerojatnosti veličine Y koja se dobije iz okvira nesigurnosti GUM-a. Ona također pokazuje jednu od aproksimacija [normaliziranu razdiobu čestoća (histogram) s $M = 10^6$ vrijednosti modela veličine Y] koja čini diskretni prikaz $\boldsymbol{G}$ (vidi podtočku 7.5) te funkcije gustoće vjerojatnosti dobivene metodom monte karlo. Krajnje točke vjerojatnosno simetrična intervala pokrivanja s razinom pokrivanja od 95 % dobivene objema metodama prikazane su kao okomite crte. Funkcija gustoće vjerojatnosti i njezina aproksimacija vizualno se ne mogu razlikovati kao odgovarajući intervali pokrivanja. Takvo slaganje bi se očekivalo u tom primjeru (za dostatno veliku vrijednost M) jer su ispunjeni svi uvjeti za primjenu okvira nesigurnosti GUM-a (vidi podtočku 5.7).

Tablica 2.: Primjena modela (21), pri čemu je svakoj ulaznoj veličini X_i dodijeljena standardna Gaussova funkcija gustoće vjerojatnosti (a) okvirom nesigurnosti GUM-a (GUF), (b) metodom monte karlo (c) analitičkim pristupom (podtočke 9.2.2.2, 9.2.2.7 i 9.2.3.4).

Metoda	M	Y	$u(y)$	Vjerojatnosno simetričan interval pokrivanja s razinom pokrivanja od 95 %	d_{low}	d_{high}	GUF validiran (δ = 0,05)?
GUF		0,00	2,00	[–3,92, 3,92]			
MCM	10^5	0,00	2,00	[–3,92, 3,92]			
MCM	10^6	0,00	2,00	[–3,92, 3,92]			
MCM	10^6	0,00	2,00	[–3,92, 3,92]			
adaptivni MCM	$1{,}23 \times 10^6$	0,00	2,00	[–3,92, 3,93]	0,00	0,01	Da
adaptivni MCM	$1{,}02 \times 10^6$	0,00	2,00	[–3,92, 3,92]	0,00	0,00	Da
analitički		0,00	2,00	[–3,92, 3,92]			



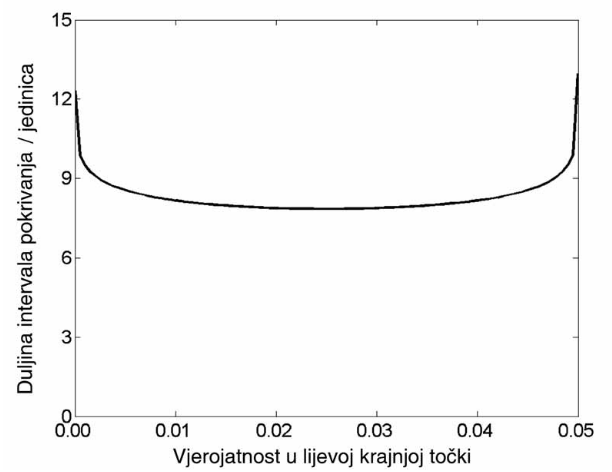
Slika 6.: Aproksimacija funkcije gustoće vjerojatnosti veličine Y za model (21) dana a) okvirom nesigurnosti GUM-a i b) metodom monte karlo (podtočke 9.2.2.6 i 9.2.3.3), pri čemu je svakoj ulaznoj veličini X_i dodijeljena standardna Gaussova funkcija gustoće vjerojatnosti. "Jedinica" označuje bilo koju jedinicu

9.2.2.7 Stupci 6 – 8 iz tablice 2. također pokazuju rezultate primjene postupaka validacije iz podtočaka 8.1 i 8.2. Uporabom nazivlja iz podtočke 7.9.2, $n_{dig} = 2$, budući da se za nesigurnost $u(y)$ traže dvije značljive desetične znamenke. Prema tomu je $u(y) = 2{,}0 = 20 \times 10^{-1}$, te je tako $c = 20$, a $\ell = -1$. Prema tomu, u skladu s podtočkom 7.9.2 dopušteno brojčano odstupanje jednako je:

$$\delta = \frac{1}{2} \times 10^{-1} = 0{,}05$$

Apsolutne vrijednosti d_{low} i d_{high} razlika krajnjih točaka [izrazi (19) i (20)] prikazane su u tablici 2. za dvije primjene adaptivnoga postupka monte karlo. Također je prikazano je li okvir nesigurnosti GUM-a validiran za $\delta = 0{,}05$.

9.2.2.8 Slika 7. prikazuje duljinu $y_{high} - y_{low}$ intervala pokrivanja s razinom pokrivanja od 95 % veličine Y (podtočka 7.7) kao funkciju vjerojatnosti u njegovoj lijevoj rubnoj točki određenu iz diskretnoga prikaza $\boldsymbol{G}$. Kao što se očekuje za simetričnu funkciju gustoće vjerojatnosti, taj interval poprima najkraću duljinu kad je simetrično smješten s obzirom na očekivanje.



Slika 7.: Duljina intervala pokrivanja s razinom pokrivanja od 95 % kao vjerojatnosti u njegovoj lijevoj rubnoj točki za diskretni prikaz *G* funkcije razdiobe dobivene primjenom metode monte karlo za model (21) (podtočke 9.2.2.8 i 9.4.2.2.11)

9.2.2.9 Podtočka 9.4 daje primjer asimetrične funkcije gustoće vjerojatnosti za koju se najkraći interval pokrivanja znatno razlikuje od vjerojatnosno simetrična intervala pokrivanja.

9.2.3 Pravokutno raspodijeljene ulazne veličine s istom širinom

9.2.3.1 Svakoj ulaznoj veličini X_i dodjeljuje se pravokutna funkcija gustoće vjerojatnosti tako da X_i ima ništično očekivanje i jedinično standardno odstupanje (za razliku od podtočke 9.2.2.1, gdje je dodijeljena Gaussova funkcija gustoće vjerojatnosti). Najbolje procjene veličine X_i ponovno su $x_i = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$ s pridruženim standardnim nesigurnostima $u(x_i) = 1$.

9.2.3.2 Analognim postupkom kao u podtočkama 9.2.2.3–9.2.2.5 dobiveni su rezultati iz tablice 3. Analitičko rješenje za krajnje točke vjerojatnosno simetrična intervala pokrivanja s razinom pokrivanja od 95 %, tj. vrijednost $\pm 2\sqrt{3}\,[2 - (3/5)^{1/4}] \approx \pm\, 3{,}88$ dobivena je kako je opisano u dodatku E.

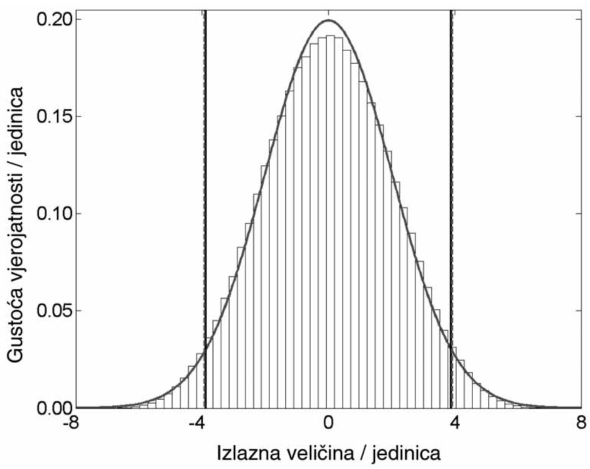
Tablica 3.: Kao tablica 2., ali za pravokutne funkcije gustoće vjerojatnosti X_i koje imaju ista očekivanja i standardna odstupanja (podtočke 9.2.3.2, 9.2.3.3 i 9.2.3.4)

Metoda	M	y	$u(y)$	Vjerojatnosno simetrična intervala procjena s razinom pokrivanja od 95 %	d_{low}	d_{high}	GUF validiran ($\delta = 0{,}05$)?
GUF		0,00	2,00	[–3,92, 3,92]			
MCM	10^5	0,00	2,01	[–3,90, 3,89]			
MCM	10^6	0,00	2,00	[–3,89, 3,88]			
MCM	10^6	0,00	2,00	[–3,88, 3,88]			
adaptivni MCM	$1{,}02 \times 10^6$	0,00	2,00	[–3,88, 3,89]	0,04	0,03	Da
adaptivni MCM	$0{,}86 \times 10^6$	0,00	2,00	[–3,87, 3,87]	0,05	0,05	Ne
analitički		0,00	2,00	[–3,88, 3,88]			

9.2.3.3 Slika 8. prikazuje odgovarajuću repliku slike 6 za taj slučaj. Usporedbom sa slikom 6. mogu se vidjeti neke neznatne razlike između aproksimacija funkcija gustoće vjerojatnosti. Okvir nesigurnosti GUM-a daje točno istu funkciju gustoće vjerojatnosti za izlaznu veličinu Y kad su funkcije gustoće vjerojatnosti ulaznih veličina X_i

Gaussove ili pravokutne jer su u ta dva slučaja očekivanja tih veličina istovjetna kao i standardna odstupanja. Funkcija gustoće vjerojatnosti dobivena metodom monte karlo poprima u blizini očekivanja manje vrijednosti od onih koje su dobivene okvirom nesigurnosti GUM-a, a u manjoj mjeri prema repovima. Ona poprima nešto veće vrijednosti na bočnim stranama. Ni u ovom se slučaju krajnje točke danog intervala pokrivanja gotovo ne mogu vizualno razlikovati, ali tablica 3. pokazuje manje razlike.

9.2.3.4 Vjerojatnosno simetričan interval pokrivanja s razinom pokrivanja od 95 % određen na temelju okvira nesigurnosti GUM-a u tom je slučaju procijenjen s ponešto manjom rezervom nego onaj dobiven analitički. Kao i za normalno raspodijeljene veličine, primijenjen je postupak validacije (stupci 6-8 tablice 3.). Kao i prije je $n_{\text{dig}} = 2$, $u(y) = 2{,}0 = 20 \times 10^{-1}$, $c = 20$, $\ell = -1$ i $\delta = 0{,}05$. Razlike krajnjih točaka d_{low} i d_{high} veće su nego u slučaju normalno raspodijeljenih veličina (tablica 2.). Za prvu od tih dviju primjena adaptivnoga postupka monte karlo validiran je okvir nesigurnosti GUM-a. Za drugu primjenu on nije validiran premda su d_{low} i d_{high} za tu primjenu bliski brojčanom dopuštenom odstupanju $\delta = 0{,}05$ (koje se vidi ako se promatra više desetičnih znamenaka nego u tablici 3.). Različiti rezultati validacije poput tih uzgredne su posljedice stohastičke naravi metode monte karlo, posebno u slučaju kao što je taj.



Slika 8.: Replika slike 6. za veličine koje imaju ista očekivanja i standardna odstupanja, ali pravokutne funkcije gustoće vjerojatnosti (podtočka 9.2.3.3)

9.2.4 Pravokutno raspodijeljene ulazne veličine s različitim širinama

9.2.4.1 Promatrajmo primjer iz podtočke 9.2.3, osim što X_4 ima standardno odstupanje jednako deset, a ne jedan. Dobiveni rezultati sadržani su u tablici 4.

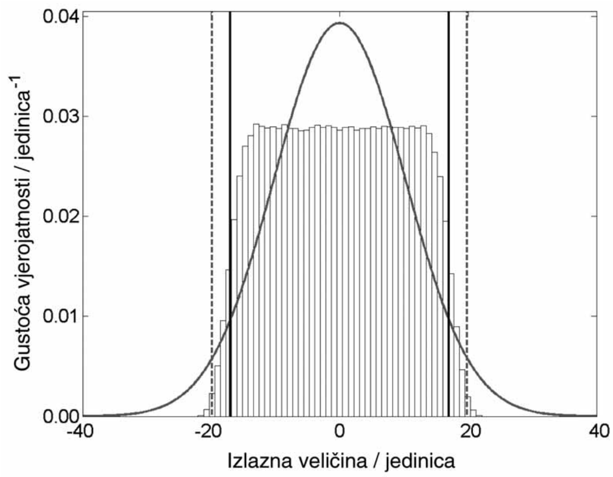
9.2.4.2 Brojevi M pokusa monte karlo uzeti adaptivnim postupkom ($0{,}03 \times 10^6$ i $0{,}08 \times 10^6$) mnogo su manji nego što bi bili u prva dva slučaja u ovome primjeru. Tomu je glavni razlog što je u tomu slučaju brojčano dopušteno odstupanje ($\delta = 0{,}5$) koje je rezultat zahtjeva da u vrijednosti nesigurnosti $u(y)$ kao i prije budu dvije značljive desetične znamenke, deset puta veće od prve vrijednosti. Kad bi se upotrijebila prijašnja vrijednost, M bi bilo veće reda veličine 100 puta.

Tablica 4.: Kao tablica 3., osim što četvrta ulazna veličina ima standardno odstupanje jednako deset, a ne jedan i ne postoji analitičko rješenje (podtočke 9.2.4.1, 9.2.4.5)

Metoda	M	y	$u(y)$	Vjerojatnosno simetrična intervala procjena s razinom pokrivanja od 95 %	d_{low}	d_{high}	GUF validiran ($\delta = 0{,}5$)?
GUF		0,0	10,1	[−19,9, 19,9]			
MCM	10^5	0,0	10,2	[−17,0, 17,0]			
MCM	10^6	0,0	10,2	[−17,0, 17,0]			
MCM	10^6	0,0	10,1	[−17,0, 17,0]			
adaptivni MCM	$0{,}03 \times 10^6$	0,1	10,2	[−17,1, 17,1]	2,8	2,8	Ne
adaptivni MCM	$0{,}08 \times 10^6$	0,0	10,1	[−17,0, 17,0]	2,9	2,9	Ne

9.2.4.3 Slika 9. prikazuje dvije aproksimacije dobivene za funkciju gustoće vjerojatnosti veličine Y. One se znatno razlikuju. Očigledno je da je dominantna funkcija gustoće vjerojatnosti veličine X_4. Funkcija gustoće vjerojatnosti izlazne veličine Y sliči na funkciju gustoće vjerojatnosti veličine X_4, ali postoji utjecaj na bočne stranice koji nastaje iz funkcija gustoće vjerojatnosti drugih veličina X_i.

9.2.4.4 Slika 9. također prikazuje krajnje točke vjerojatnosno simetrična intervala povjerenja veličine Y s razinom povjerenja od 95 % koji je dobiven iz tih aproksimacija. Unutrašnji par okomitih crta označuje krajnje točke vjerojatnosno simetrična intervala povjerenja s razinom povjerenja od 95 % određena metodom monte karlo. Vanjski par crta dobiva se kao rezultat iz okvira nesigurnosti GUM-a s faktorom pokrivanja od k = 1,96.



Slika 9.: Kao i slika 8. osim što četvrta ulazna veličina nema jedinično standardno odstupanje nego standardno odstupanje jednako deset (podtočke 9.2.4.3 i 9.2.4.4)

9.2.4.5 Vjerojatnosno simetričan interval pokrivanja s razinom pokrivanja od 95 % koji je u tom slučaju određen na temelju okvira nesigurnosti GUM-a procijenjen je s ponešto manjom rezervom nego onaj dobiven uporabom metode monte karlo. Ponovno je bio primijenjen postupak validacije (stupci 6-8 tablice 4.). Sada su $n_{\text{dig}} = 2$, $u(y) = 1{,}0\times 10^1 = 10\times 10^0$, $c = 1$, $\ell = 0$ i $\delta = (½)\times 10^0 = 0{,}5$. Okvir nesigurnosti GUM-a nije validiran za te dvije primjene adaptivnoga postupka monte karlo. Za dopušteno brojčano odstupanje s jednom značljivom znamenkom u $u(y)$, tj. s $n_{\text{dig}} = 1$, za koje je $\delta = 5$, status validacije bio bi pozitivan u oba slučaja, svi su intervali s razinom povjerenja od 95 % [-2×10^1 i 2×10^1]. Vidi podtočku 4.13.

NAPOMENA: U tim okolnostima zbog dominantnoga djelovanja pravokutne funkcije gustoće vjerojatnosti ulazne veličine X_4 (vidi podtočku 5.7.2) nisu u cijelosti ispunjeni uvjeti za primjenu središnjega graničnog teorema [GUM:1995, G.6.5]. Međutim, budući da se često pretpostavlja da su ti uvjeti u praksi ispunjeni, posebno kad se za određivanje nesigurnosti na temelju pretpostavke o primjenjivosti toga teorema upotrebljava prikladna programska podrška (vidi podtočku 9.4.2.5, napomenu 3), u ovoj se podtočki radi usporedbe izlazna veličina Y opisuje Gaussovom funkcijom gustoće vjerojatnosti.

9.3 Umjeravanje mase

9.3.1 Formuliranje

9.3.1.1 Razmotrimo umjeravanje utega W masene gustoće ρ_{W} u odnosu na referentni uteg R masene gustoće ρ_{R} koji ima istu nazivnu masu uporabom vage koja radi u zraku masene gustoće ρ_{a} [39]. Budući da su gustoće ρ_{W} i ρ_{R} općenito različite, potrebno je uzeti u obzir djelovanja uzgona. Primjenom Arhimedova načela model poprima oblik:

$$m_{\text{W}}(1 - \rho_{\text{a}}/\rho_{\text{W}}) = (m_{\text{R}} + \delta m_{\text{R}})(1 - \rho_{\text{a}}/\rho_{\text{R}}) \tag{22}$$

gdje je δm_{R} masa malog utega gustoće ρ_{R} koji je dodan utegu R kako bi se uravnotežio s utegom W.

9.3.1.2 Uobičajeno je raditi s dogovorenim masama. Dogovorena masa $m_{\mathrm{W,c}}$ utega W jednaka je masi (hipotetičnog) utega gustoće $\rho_0 = 8\,000$ kg/m^3 koji uravnotežuje uteg W u zraku gustoće $\rho_{\mathrm{a}_0} = 1{,}2$ kg/m^3. Prema tomu je

$$m_{\mathrm{W}}(1 - \rho_{\mathrm{a}_0}/\rho_{\mathrm{W}}) = m_{\mathrm{W,c}}(1 - \rho_{\mathrm{a}_0}/\rho_0).$$

9.3.1.3 Na temelju dogovorenih masa $m_{\mathrm{W,c}}$, $m_{\mathrm{R,c}}$ i $\delta m_{\mathrm{R,c}}$ model (22) postaje:

$$m_{\mathrm{W,c}}(1 - \rho_{\mathrm{a}}/\rho_{\mathrm{W}})(1 - \rho_{\mathrm{a}_0}/\rho_{\mathrm{W}})^{-1} = (m_{\mathrm{R,c}} + \delta m_{\mathrm{R,c}})\,(1 - \rho_{\mathrm{a}}/\rho_{\mathrm{R}})(1 - \rho_{\mathrm{a}_0}/\rho_{\mathrm{R}})^{-1}, \qquad (23)$$

iz čega se dobije aproksimacija koja je prikladna za najpraktičnije svrhe:

$$m_{\mathrm{W,c}} = (m_{\mathrm{R,c}} + \delta m_{\mathrm{R,c}})\left[1 + (\rho_{\mathrm{a}} - \rho_{\mathrm{a}_0})\left(\frac{1}{\rho_{\mathrm{W}}} - \frac{1}{\rho_{\mathrm{R}}}\right)\right].$$

Neka je:

$$\delta m = m_{\mathrm{W,c}} - m_{\mathrm{nom}}$$

odstupanje dogovorene mase $m_{\mathrm{W,c}}$ od nazivne mase

$$m_{\mathrm{nom}} = 100 \text{ g}.$$

Model koji se upotrebljava u ovome primjeru dan je izrazom:

$$\delta m = (m_{\mathrm{R,c}} + \delta m_{\mathrm{R,c}})\left[1 + (\rho_{\mathrm{a}} - \rho_{\mathrm{a}_0})\left(\frac{1}{\rho_{\mathrm{W}}} - \frac{1}{\rho_{\mathrm{R}}}\right)\right] - m_{\mathrm{nom}}. \qquad (24)$$

NAPOMENA: Primjenu zakona prijenosa nesigurnosti na "točni" model (23) otežava algebarska složenost izračuna parcijalnih derivacija. Lakše je primjenjivati metodu monte karlo zbog toga što je potrebno utvrditi samo vrijednosti modela.

9.3.1.4 Jedini dostupni podatci koji se odnose na dogovorene mase $m_{\mathrm{R,c}}$ i $\delta m_{\mathrm{R,c}}$ najbolje su procjene i pridružene standardne nesigurnosti za svaku od tih veličina. U skladu s tim primjenom podtočke 6.4.7.1 svakoj od tih veličina dodjeljuje se Gaussova razdioba, pri čemu se te najbolje procjene upotrebljavaju kao očekivanja odgovarajućih veličina, a pridružene standardne nesigurnosti kao standardna odstupanja. Jedini dostupni podatci koji se odnose na ρ_{a}, ρ_{W} i ρ_{R} donja su i gornja granica za svaku od tih veličina. U skladu s tim primjenom podtočke 6.4.2.1 svakoj od tih veličina dodjeljuje se pravokutna razdioba s granicama jednakim tim krajnjim točkama razdiobe. Tablica 5. daje prikaz u sažetu obliku ulaznih veličina i dodijeljenih funkcija gustoće vjerojatnosti. U toj je tablici Gaussova razdioba N(μ, σ^2) opisana očekivanjem μ i standardnim odstupanjem σ, a pravokutna razdioba R(a,b) s krajnjim točkama a i b ($a < b$), očekivanjem $(a + b)/2$ i poluširinom $(b - a)/2$.

NAPOMENA: Veličini ρ_{a_0} u modelu umjeravanja mase (24) dodijeljena je vrijednost od 1,2 kg/m^3 bez pridružene nesigurnosti.

Tablica 5.: Ulazne veličine X_i i njima dodijeljene funkcije gustoće vjerojatnosti za model umjeravanja mase (24) (podtočka 9.3.1.4).

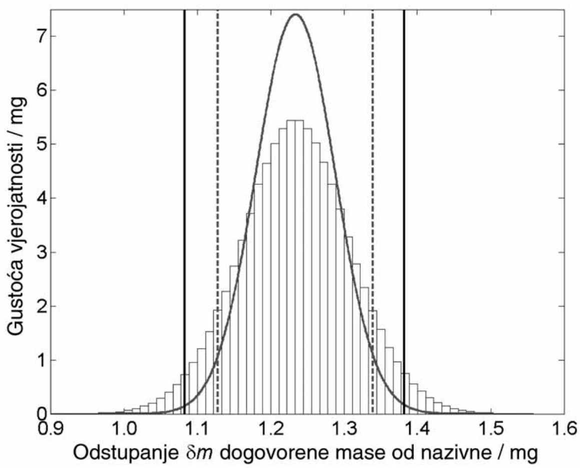
X_i	Razdioba	Parametri			
		Očekivanje μ	**Standardno odstupanje** σ	**Očekivanje** $x = (a + b)/2$	**Poluširina** $(b - a)/2$
$m_{\mathrm{R,c}}$	N(μ, σ^2)	100 000,000 mg	0,050 mg		
$\delta m_{\mathrm{R,c}}$	N(μ, σ^2)	1,234 mg	0,020 mg		
ρ_{a}	R(a, b)			1,2 kg/m^3	0,10 kg/m^3
ρ_{W}	R(a, b)			8×10^3 kg/m^3	1×10^3 kg/m^3
ρ_{R}	R(a, b)			$8{,}00 \times 10^3$ kg/m^3	$0{,}05 \times 10^3$ kg/m^3

9.3.2 Prijenos i prikaz u sažetu obliku

9.3.2.1 Za dobivanje procjene $\widehat{\delta m}$ veličine δm, pridružene standardne nesigurnosti $u(\widehat{\delta m})$ i najkraćeg intervala pokrivanja s razinom pokrivanja od 95 % za veličinu δm upotrebljava se okvir nesigurnosti GUM-a i adaptivni postupak monte karlo (vidi podtočku 7.9). Dobiveni rezultati prikazani su u tablici 6., u kojoj GUF$_1$ označuje okvir nesigurnosti GUM-a s članovima prvog reda, MCM adaptivni postupak monte karlo, a GUF_2 okvir nesigurnosti GUM-a s članovima višeg reda.

9.3.2.2 Adaptivnim postupkom monte karlo provedeno je $0{,}72 \times 10^6$ pokusa uporabom istoga brojčanog dopuštenog odstupanja od $\delta/5$ (vidi podtočku 8.2) s δ postavljenim za slučaj gdje se jedna važna desetična znamenka u nesigurnosti $u(\widehat{\delta m})$ smatra prihvatljivom (vidi podtočku 9.3.2.6).

9.3.2.3 Slika 10. prikazuje aproksimacije funkcije gustoće vjerojatnosti za δm dobivene iz okvira nesigurnosti GUM-a s članovima prvog reda i metodom monte karlo. Neprekidna krivulja prikazuje Gaussovu funkciju gustoće vjerojatnosti s parametrima danim okvirom nesigurnosti GUM-a. Par unutrašnjih (isprekidanih) okomitih crta označuje najkraći interval pokrivanja s razinom pokrivanja od 95 % za δm koji se temelji na toj funkciji gustoće vjerojatnosti. Taj je histogram nenormalizirana razdioba čestoća koja se kao aproksimacija funkcije gustoće vjerojatnosti dobiva uporabom metode monte karlo. Vanjski par (neprekidnih) okomitih crta označuje najkraći interval s razinom povjerenja od 95 % za δm na temelju diskretnoga prikaza funkcije razdiobe određene kao u podtočki 7.5.



Slika 10.: Aproksimacije funkcije gustoće vjerojatnosti izlazne veličine δm dobivene uporabom okvira nesigurnosti GUM-a s članovima prvog reda i metodom monte karlo (podtočka 9.3.2.3)

Tablica 6.: Rezultati faze izračuna za model umjeravanja mase (24) (podtočke 9.3.2.1 i 9.3.2.6).

Metoda	$\widehat{\delta m}$ / mg	$u(\widehat{\delta m})$ / mg	**Najkraći interval pokrivanja s razinom pokrivanja od 95 %** / mg	d_{low} / mg	d_{high} / mg	**Validirani GUF** (δ = 0,005)?
GUF_1	1,234 0	0,053 9	[1,128 5, 1,339 5]	0,045 1	0,043 0	Ne
MCM	1,234 1	0,075 4	[1,083 4, 1,382 5]			
GUF_2	1,234 0	0,075 0	[1,087 0, 1,381 0]	0,003 6	0,001 5	Da

9.3.2.4 Premda se procjene δm dobivene okvirom nesigurnosti GUM-a (aproksimacijom s članovima prvog reda) i metodom monte karlo dobro slažu, rezultati pokazuju da se brojčane vrijednosti pridruženih standardnih nesigurnosti prilično razlikuju. Vrijednost (od 0,075 4 mg) nesigurnosti $u(\widehat{\delta m})$ dobivena metodom monte karlo za 40 % je veća od vrijednosti (od 0,053 9 mg) dobivene okvirom nesigurnosti GUM-a (aproksimacijom s članovima prvog reda). Potonja je optimistična u tomu smislu. Postoji dobro slaganje između nesigurnosti $u(\widehat{\delta m})$ određene metodom monte karlo i vrijednosti (0,075 0 mg) dobivene okvirom nesigurnosti GUM-a s članovima višeg reda.

9.3.2.5 Tablica 7. sadržava parcijalne derivacije prvog reda modela (24) po ulaznim veličinama zajedno s koeficijentima osjetljivosti, tj. tim derivacijama određenim u najboljim procjenama ulaznih veličina. Te derivacije pokazuju da se za svrhe primjene okvira nesigurnosti GUM-a s članovima prvog reda može smatrati da je u tom primjeru taj model zamijenjen aditivnim modelom:

$$\delta m = m_{R,c} + \delta m_{R,c} - m_{nom}.$$

Metodom monte karlo ne provodi se takva (implicitna) aproksimacija modela.

Tablica 7.: Koeficijenti osjetljivosti za model umjeravanja mase (24) (podtočka 9.3.2.5)

X_i	Parcijalne derivacije	Koeficijenti osjetljivosti
$m_{R,c}$	$1 + (\rho_a - \rho_{a_0})(1/\rho_W - 1/\rho_R)$	1
$\delta m_{R,c}$	$1 + (\rho_a - \rho_{a0})(1/\rho_W - 1/\rho_R)$	1
ρ_a	$(m_{R,c} + \delta m_{R,c})(1/\rho_W - 1/\rho_R)$	0
ρ_W	$-(m_{R,c} + \delta m_{R,c})(\rho_a - \rho_{a0})/\rho_W^2$	0
ρ_R	$(m_{R,c} + \delta m_{R,c})(\rho_a - \rho_{a0})/\rho_R^2$	0

9.3.2.6 Tablica 8. također prikazuje u tri desna stupca rezultate primjene postupka validacije iz podtočaka 8.1 i 8.2 u slučaju gdje se jedna važna desetična znamenka u $u(\widehat{\delta m})$ smatra prihvatljivom. Upotrebljava se nazivlje iz te podtočke, $n_{dig} = 1$, jer se u $u(\widehat{\delta m})$ zahtijeva brojčano dopušteno odstupanje od jedne značljive desetične znamenke. Prema tomu je $u(\widehat{\delta m}) = 0{,}08 = 8 \times 10^{-2}$, te je tako c u podtočki 7.9.2 jednako 8, a $\ell = -2$. Prema tomu je $\delta = (1/2) \times 10^{-2} = 0{,}005$. Veličine d_{low} i d_{high} označuju apsolutne vrijednosti razlika krajnjih točaka (19) i (20), pri čemu y odgovara $\widehat{\delta m}$. U posljednjem stupcu tablice označeno je jesu li ti rezultati validirani na jednu značljivu desetičnu znamenku u nesigurnosti $u(\widehat{\delta m})$. Ako se uzimaju u obzir samo članovi prvog reda ne validira se primjena okvira nesigurnosti GUM-a. Ako se uzimaju u obzir članovi višeg reda [GUM:1995, 5.1.2 napomena] primjena okvira nesigurnosti GUM-a validira se. Dakle nelinearnost modela takva je da nije prikladno uzimati u obzir samo članove prvog reda.

9.4 Usporedba gubitaka pri umjeravanju mikrovalnog mjerila snage

9.4.1 Formuliranje

9.4.1.1 Tijekom umjeravanja mikrovalnog mjerila snage, mjerilo snage i etalonsko mjerilo spojeni su na stabilni generator signala. Snaga koju apsorbira svako mjerilo općenito će biti različita zbog toga što njihovi ulazni kompleksni koeficijenti refleksije napona nisu istovjetni. Omjer Y snage P_M koju apsorbira mjerilo koje se umjerava i snage P_S koju apsorbira etalon jednak je [43]:

$$Y = \frac{P_M}{P_S} = \frac{1-|\Gamma_M|^2}{1-|\Gamma_S|^2} \times \frac{|1-\Gamma_S\Gamma_G|^2}{|1-\Gamma_M\Gamma_G|^2}, \tag{25}$$

gdje je Γ_G koeficijent refleksije napona generatora signala, Γ_M koeficijent refleksije napona mjerila koje se umjerava, a Γ_S koeficijent refleksije napona etalonskog mjerila. Taj je omjer snaga primjer "usporedbe gubitaka" [1, 28].

9.4.1.2 Promatrajmo slučaj u kojemu su etalon i generator signala bez refleksija, tj. $\Gamma_S = \Gamma_G = 0$, a izmjerene vrijednosti dobivene su od realnih i imaginarnih dijelova X_1 i X_2 veličine $\Gamma_M = X_1 + jX_2$, gdje je $j^2 = -1$. Budući da je $|\Gamma_M|^2 = X_1^2 + X_2^2$, formula (25) postaje:

$$Y = 1 - X_1^2 - X_2^2 \tag{26}$$

9.4.1.3 Redom su dane najbolje procjene x_1 i x_2 veličina X_1 i X_2 iz mjerenja i pridružene standardne nesigurnosti $u(x_1)$ i $u(x_2)$. Veličine X_1 i X_2 često nisu neovisne. Kovarijancija pridružena procjenama x_1 i x_2 označuje se s $u(x_1, x_2)$. U skladu s GUM-om [GUM:1995, 5.2.2] $u(x_1, x_2) = r(x_1, x_2)u(x_1)u(x_2)$, gdje $r(x_1, x_2)$ označuje pridruženi koeficijent korelacije [GUM:1995, 5.2.2].

NAPOMENA: U praksi inženjer elektrotehnike može katkad imati poteškoće pri količinskomu određivanju kovarijancije. U takvim se slučajevima određivanje nesigurnosti može ponavljati s različitim brojčanim vrijednostima koeficijenta korelacije kako bi se proučio njegov učinak. U ovom se primjeru provode izračuni uporabom ništičnog koeficijenta korelacije i koeficijenta korelacije jednakog 0,9 (vidi podtočku 9.4.1.7).

9.4.1.4 Na temelju podtočke 6.4.8.1, vektorskoj veličini $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)^\top$ dodijeljena je dvodimenzijska Gaussova funkcija gustoće vjerojatnosti veličina X_1 i X_2 s matričnim očekivanjem i kovarijancijskom matricom:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u^2(x_1) & ru(x_1)u(x_2) \\ ru(x_1)u(x_2) & u^2(x_2) \end{bmatrix}. \tag{27}$$

9.4.1.5 Zbog toga što su apsolutne vrijednosti veličina X_1 i X_2 u izrazu (26) u praksi malene u usporedbi s jedinicom, dobivena izlazna veličina Y bliska je jedinici. Rezultati se u skladu s tim iskazuju s pomoću veličine:

$$\delta Y = 1 - Y = X_1^2 + X_2^2 \tag{28}$$

koja se uzima kao model mjerenja. Iz fizikalnih je razloga $0 \leq Y \leq 1$, te je prema tomu $0 \leq \delta Y \leq 1$.

9.4.1.6 Određivanje procjene δy veličine δY, pridružene standardne nesigurnosti $u(\delta y)$ i intervala pokrivanja veličine δY razmotrit će se za odabir x_1, x_2, $u(x_1)$, $u\ (x_2)$ i $r(x_1, x_2)$. Sve veličine imaju dimenziju 1.

9.4.1.7 Razmatra se šest slučajeva, u svima njima uzima se da je x_2 jednako ništici, a $u(x_1) = u(x_2) = 0{,}005$. U prva se tri slučaja uzimaju vrijednosti procjene $x_1 = 0$; 0,010 i 0,050 svaka s koeficijentom korelacije $r(x_1, x_2) = 0$. U druga se tri slučaja uzima ista vrijednost procjene x_1, ali s koeficijentom korelacije $r(x_1, x_2) = 0{,}9$. Za istraživanje opsega u kojemu se razlikuju rezultati dobiveni uporabom razmatranih pristupa upotrebljavaju se različite brojčane vrijednosti za x_1 (u usporedbi s onima koje se pojavljuju u praksi).

9.4.1.8 Za te slučajeve u kojima je $r(x_1, x_2) = 0$ matrica kovarijancije iz formule (27) svodi se na dijagonalnu matricu dijag$[u^2(x_1), u^2(x_2)]$, a odgovarajuća zajednička razdioba veličina X_1 i X_2 na umnožak dviju jednodimenzijskih Gaussovih razdioba za X_i za $i = 1, 2$ s očekivanjem x_i i standardnim odstupanjem $u(x_i)$.

9.4.2 Prijenos i prikaz u sažetu obliku: ništična kovarijancija

9.4.2.1 Općenito

9.4.2.1.1 Određivanje nesigurnosti provodi se primjenom prijenosa razdioba:

a) analitički (radi usporedbe),

b) uporabom okvira nesigurnosti GUM-a i

c) uporabom metode monte karlo.

NAPOMENA: Ti pristupi ne ograničuju funkciju gustoće vjerojatnosti veličine δY da ne bude veća od jedinice. Međutim za dostatno malene nesigurnosti $u(x_1)$ i $u(x_2)$ kao ovdje funkcija gustoće vjerojatnosti veličine δY može se prikladno aproksimirati jednostavnijom funkcijom gustoće vjerojatnosti definiranom na svim nenegativnim vrijednostima za δY. Moguć je stroži postupak uporabom Bayesova zaključka [51] koji se primjenjuje bez obzira na velikoće nesigurnosti $u(x_1)$ i $u(x_2)$, ali izlazi iz okvira ove dopune. Vidi također točku 1., napomenu 2.

9.4.2.1.2 Procjena δy i nesigurnost $u(\delta y)$ mogu se općenito odrediti analitički kao očekivanje i standardno odstupanje veličine δY, na temelju funkcije gustoće vjerojatnosti veličine δY. Vidi podtočku F.1. Funkcija gustoće vjerojatnosti veličine δY može se analitički odrediti kad je $x_1 = 0$ i u tom slučaju posebno upotrebljavati za određivanje krajnjih točaka najkraćeg intervala pokrivanja s razinom pokrivanja od 95 %. Vidi podtočku F.2.

9.4.2.1.3 Za svaku od triju procjena x_1 u nekoreliranom slučaju primjenjuje se okvir nesigurnosti GUM-a s članovima prvog reda i višeg reda (vidi podtočku F.3). Procjena δy veličine δY u svakom se slučaju dobiva [GUM:1995, 4.1.4] iz izraza:

$$\delta y = x_1^2 + x_2^2.$$

9.4.2.1.4 Metoda monte karlo primjenjuje se u svakom slučaju s $M = 10^6$ pokusa.

9.4.2.2 Ulazna procjena $x_1 = 0$

9.4.2.2.1 Kad se primjenjuje zakon prijenosa nesigurnosti za procjenu ulazne veličine $x_1 = 0$ moraju se upotrebljavati članovi višeg reda jer su parcijalne derivacije veličine δY po veličinama X_1 i X_2 određene u vrijednostima procjena $X_1 = x_1$ i $X_2 = x_2$ istovjetne ništici kad je $x_1 = x_2 = 0$. Prema tomu kad bi se samo primjenjivao zakon prijenosa nesigurnosti s članovima prvog reda, neispravno bi se računski dobilo da je standardna nesigurnost jednaka ništici.

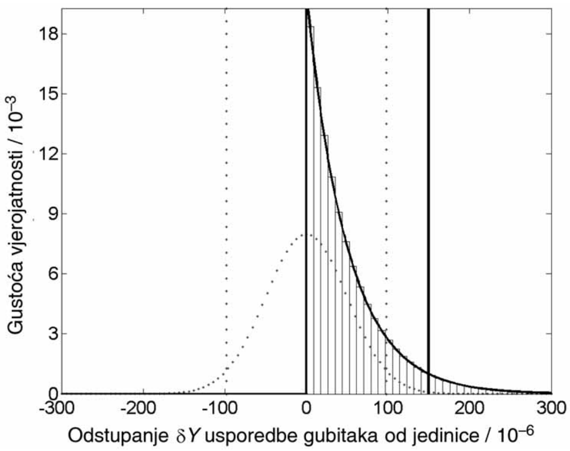
NAPOMENA: Slična poteškoća bi nastala kad bi procjena x_1 bila bliska ništici.

9.4.2.2.2 Slika 11. prikazuje funkcije gustoće vjerojatnosti veličine δY određene primjenom prijenosa razdioba:

a) analitički (eksponencijalno padajuća krivulja za $\delta Y \geq 0$ i ništica za ostale vrijednosti),

b) uporabom okvira nesigurnosti GUM-a s članovima višeg reda kako bi se opisala izlazna veličina Gaussovom funkcijom razdiobe vjerojatnosti (zvonolika krivulja) i

c) uporabom metode monte karlo (normalizirana razdioba čestoća).



Slika 11.: Rezultati za model usporedbe gubitka umjeravanja mjerila snage u slučaju $x_1 = x_2 = 0$, s $u(x_1) = u(x_2) = 0{,}005$ i $r(x_1, x_2) = 0$ (podtočke 9.4.2.2.2, 9.4.2.2.6, 9.4.2.2.9 i 9.4.2.2.11)

9.4.2.2.3 Sa slike se vidi da uporaba okvira nesigurnosti GUM-a s članovima višeg reda za opis izlazne veličine Gaussovom razdiobom dovodi do funkcije gustoće vjerojatnosti koja se veoma razlikuje od analitičkog rješenja. Potonja poprima oblik posebne hikvadrat razdiobe – razdiobe zbroja kvadrata dviju standardnih Gaussovih varijabla (vidi podtočku F.2).

9.4.2.2.4 Kako su parcijalne derivacije funkcije modela (28) reda višeg od dva sve identično jednake ništici, dobiveno rješenje u biti odgovara rješenju koje bi se dobilo uzimanjem u obzir svih članova razvoja u Taylorov red, tj. uzimanjem u obzir potpune nelinearnosti problema. Stoga je tako određena posebna Gaussova razdioba najbolja razdioba koja je moguća uporabom okvira nesigurnosti GUM-a za opis izlazne veličine takvom razdiobom.

9.4.2.2.5 Može se prema tomu zaključiti da je razlog za odstupanje od analitičkog rješenja rezultata uporabe pristupa koji se temelji na okviru nesigurnosti GUM-a u tome što je izlazna veličina opisana Gaussovom funkcijom gustoće vjerojatnosti. U tom slučaju Gaussova funkcija gustoće vjerojatnosti, bez obzira na to kako je dobivena, ne bi mogla predstavljati odgovarajuće analitičko rješenje.

9.4.2.2.6 Sa slike 11. također se vidi da je funkcija gustoće vjerojatnosti dobivena metodom monte karlo sukladna s analitičkim rješenjem.

9.4.2.2.7 Procjene δy određene kao očekivanje veličine δY opisane funkcijama gustoće vjerojatnosti koje su dobivene:

a) analitički

b) uporabom okvira nesigurnosti GUM-a i

c) primjenom metode monte karlo

dane su u tablici 8. u stupcima 2 – 4 retka koji odgovara procjeni $x_1 = 0{,}000$. Stupci 5 – 8 sadrže odgovarajuće nesigurnosti $u(\delta y)$ s nesigurnostima koje su dobivene uporabom okvira nesigurnosti GUM-a aproksimacijom s pomoću članova prvog reda (G_1) i članova višeg reda (G_2).

9.4.2.2.8 Procjena $\delta y = 0$ dobivena određivanjem vrijednosti modela u ulaznim procjenama nije valjana: ispravna (analitička) funkcija gustoće vjerojatnosti veličine δY identično je jednaka ništici za $\delta Y < 0$; ta procjena leži na granici neništičnoga dijela te funkcije. Procjena dobivena metodom monte karlo slaže se s analitički dobivenom

Tablica 8.: Rezultati usporedbe gubitka za ulazne procjene s pridruženom ništičnom kovarijancijom, dobiveni analitički (A) i uporabom okvira nesigurnosti GUM-a s članovima prvog reda (G_1) i članovima višeg reda (G_2) te metodom monte karlo (M) (podtočke 9.4.2.2.7, 9.4.2.2.10, 9.4.2.3.4 i 9.4.2.4.2)

x_1	Procjena $\delta y/10^{-6}$			Standardna nesigurnost $u(\delta y)/10^{-6}$				Najkraći interval pokrivanja s razinom pokrivanja od 95 % $\delta Y/10^{-6}$			
	A	**G**	**M**	**A**	**G_1**	**G_2**	**M**	**A**	**G_1**	**G_2**	**M**
0,000	50	0	50	50	0	50	50	[0, 150]	[0, 0]	[−98, 98]	[0, 150]
0,010	150	100	150	112	100	112	112	–	[−96, 296]	[−119, 319]	[0, 367]
0,050	2 550	2 500	2 551	502	500	500	502	–	[1 520, 3 480]	[1 515, 3 485]	[1 590, 3 543]

procjenom. Zakon prijenosa nesigurnosti koji se temelji na aproksimaciji članovima prvog reda daje pogrješnu, ništičnu, vrijednost za već spomenutu nesigurnost $u(\delta y)$. Vrijednost (od 50×10^{-6}) dobivena iz zakona prijenosa nesigurnosti koja se temelji na aproksimaciji članovima višeg reda slaže se s vrijednošću dobivenom analitički i metodom monte karlo.

NAPOMENA: Kad bi se metoda monte karlo ponovila nekoliko puta, dobiveni bi rezultati bili razasuti oko vrijednosti 50×10^{-6}. Kad se ona ponovi više puta s većim brojem pokusa M, rezultati bi ponovno bili razasuti oko vrijednosti 50×10^{-6}, ali s manjim rasipanjem. Takvi su učinci rasipanja očekivani i bili su zapaženi za druge provedene izračune monte karlo. Iskazivanje rezultata s većim brojem važnih znamenaka bilo bi nužno da se vide stvarne brojčane razlike.

9.4.2.2.9 Slika 11. također prikazuje najkraće intervale pokrivanja s razinom pokrivanja od 95 % za odgovarajuće aproksimacije funkcije razdiobe veličine δY. Interval pokrivanja s razinom pokrivanja od 95 % označen isprekidanim okomitim crtama kako je dan okvirom nesigurnosti GUM-a nije ostvariv: on je simetričan oko $\delta Y = 0$ i prema tomu pogrješno implicira da postoji vjerojatnost od 50 % da je δY negativno. Neprekidne okomite crte krajnje su točke intervala pokrivanja s razinom pokrivanja od 95 % izvedena iz analitičkog rješenja kako je opisano u podtočki F.2. Krajnje točke intervala pokrivanja s razinom pokrivanja od 95 % određena uporabom metode monte karlo ne mogu se razlikovati s točnošću koju daje grafička metoda od onih koje se dobiju analitičkim rješenjem.

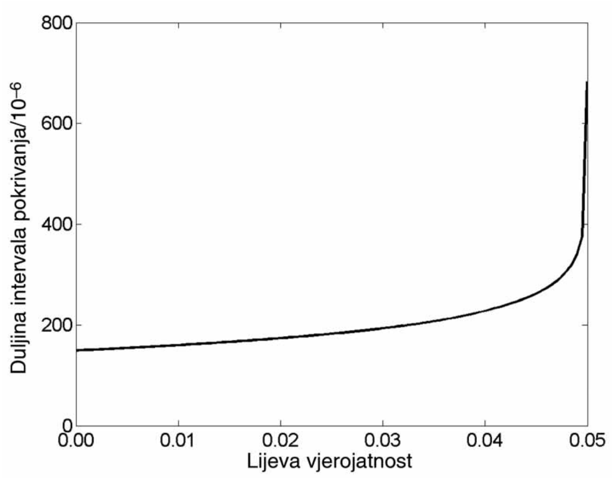
9.4.2.2.10 Krajnje točke najkraćih intervala pokrivanja koji se odnose na standardne nesigurnosti u stupcima 5 – 8 retka koji odgovara $x_1 = 0{,}000$ u tablici 8 dane su u toj tablici u stupcima 9 – 12.

9.4.2.2.11 Slika 12. pokazuje duljinu intervala pokrivanja s razinom pokrivanja od 95 % (vidi podtočku 7.7) kao funkciju vrijednosti vjerojatnosti u njezinoj lijevoj krajnjoj točki za aproksimaciju funkcije gustoće vjerojatnosti dobivenu metodom monte karlo prikazanu na slici 11. U tom slučaju interval pokrivanja s razinom pokrivanja od 95 % ne poprima svoju najkraću duljinu kad je simetrično postavljen u odnosu na očekivanje. Doista, najkraći interval pokrivanja s razinom pokrivanja od 95 % pomaknut je što je više moguće od vjerojatnosno simetrična intervala pokrivanja, pri čemu su vjerojatnosti lijevoga i desnoga repa redom jednake 0 % i 5 %, a ne 2,5 % i 2,5 %. Ta se slika može usporediti sa slikom za aditivni model (slika 7.) iz podtočke 9.2 za koji je funkcija gustoće vjerojatnosti veličine Y simetrična oko njezina očekivanja.

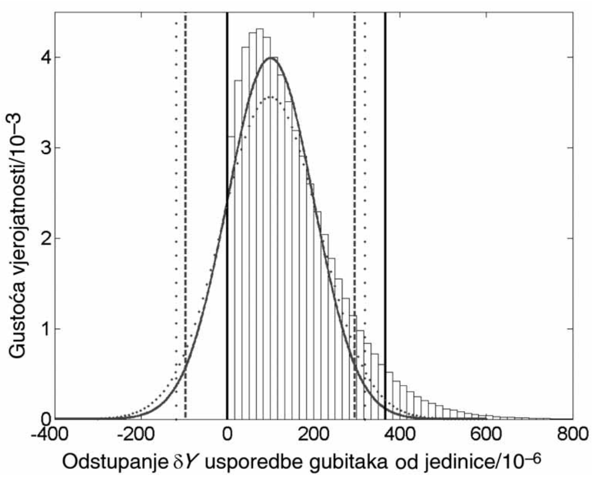
9.4.2.3 Ulazna procjena $x_1 = 0{,}010$

9.4.2.3.1 Za procjenu ulazne veličine $x_1 = 0{,}010$ s koeficijentom korelacije $r(x_1, x_2) = 0$, slika 13. pokazuje funkcije gustoće vjerojatnosti dobivene uporabom okvira nesigurnosti GUM-a samo sa članovima prvog reda i s članovima višeg reda te uporabom metode monte karlo.

9.4.2.3.2 Funkcija gustoće vjerojatnosti dobivena metodom monte karlo pokazuje malen bočni nagib na lijevoj strani premda je odrezana u ništici, najmanjoj mogućoj brojčanoj vrijednosti veličine δY. Nadalje, u usporedbi s rezultatima $x_1 = 0$, ona je po obliku bliža Gaussovim funkcijama gustoće vjerojatnosti dobivenim uporabom okvira nesigurnosti GUM-a. Te Gaussove funkcije gustoće vjerojatnosti razmjerno su međusobno bliske, pri čemu δY ima očekivanje od $1{,}0 \times 10^{-4}$ te standardna odstupanja redom od $1{,}0 \times 10^{-4}$ i $1{,}1 \times 10^{-4}$.



Slika 12.: Duljina intervala pokrivanja s razinom pokrivanja od 95 % kao funkcija vrijednosti vjerojatnosti u njezinoj krajnjoj točki za aproksimaciju funkcije razdiobe dobivenu primjenom metode monte karlo na model (28) (podtočka 9.4.2.2.11)



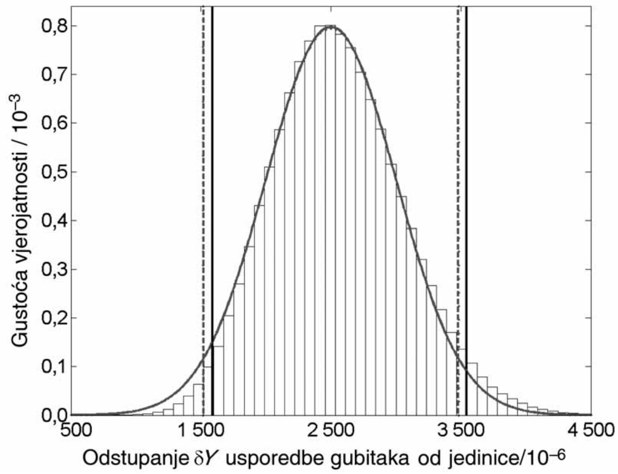
Slika 13.: Kao slika 11. osim što je $x_1 = 0{,}010$, **a funkcija gustoće vjerojatnosti koja nastaje iz okvira nesigurnosti GUM-a s članovima prvog reda (krivulja s višom vršnom vrijednošću) i višeg reda (krivulja s nižom vršnom vrijednošću) (podtočke 9.4.2.3.1, 9.4.2.3.3, 9.4.2.4.1 i 9.4.3.3)**

9.4.2.3.3 Slika 13. također pokazuje krajnje točke najkraćeg intervala pokrivanja s razinom pokrivanja od 95 % dobivena s pomoću ta tri pristupa. Neprekidne okomite crte označuju krajnje točke intervala dobivene metodom monte karlo, podebljane isprekidane okomite crte krajnje točke dobivene iz okvira nesigurnosti GUM-a s članovima prvog reda, a tanke okomite crte krajnje točke dobivene iz okvira nesigurnosti GUM-a s članovima višeg reda. Intervali dobiveni uporabom okvira nesigurnosti GUM-a pomaknuti su lijevo u usporedbi s najkraćim intervalom pokrivanja s razinom pokrivanja od 95 % za metodu monte karlo. Slijedom toga one ponovno uključuju neostvarive vrijednosti veličine δY. Pomak je oko 70 % od standardne nesigurnosti. Interval dobiven metodom monte karlo ima svoju lijevu krajnju točku u ništici, najmanjoj ostvarivoj vrijednosti.

9.4.2.3.4 Odgovarajući rezultati dani su u predzadnjem retku tablice 8.

9.4.2.4 Ulazna procjena $x_1 = 0{,}050$

9.4.2.4.1 Slika 14. slična je slici 13., ali za $x_1 = 0{,}050$. Sada se funkcije gustoće vjerojatnosti dobivene objema varijantama okvira nesigurnosti GUM-a stvarno ne mogu razlikovati. Osim toga, one su mnogo bliže aproksimaciji funkcije gustoće vjerojatnosti dobivene metodom monte karlo. Ta funkcija gustoće vjerojatnosti pokazuje blagu asimetriju, kako se vidi u područjima njezina repa. Intervali pokrivanja dobiveni tim dvjema varijantama okvira nesigurnosti GUM-a vizualno su gotovo istovjetni, ali su još uvijek pomaknuti u odnosu na one dobivene metodom monte karlo. Sada je pomak oko 10 % od standardne nesigurnosti. Sada su intervali dani okvirom nesigurnosti GUM-a ostvarivi.



Slika 14.: Kao slika 13. osim što je $x_1 = 0{,}050$ **(podtočke 9.4.2.4.1 i 9.4.3.3)**

9.4.2.4.2 Odgovarajući rezultati dani su u posljednjemu retku tablice 8.

9.4.2.5 Rasprava

Što se procjena x_1 više udaljava od ništice, rezultati dobiveni okvirom nesigurnosti GUM-a s članovima prvog reda i višeg reda i rezultati dobiveni metodom monte karlo postaju međusobno bliži.

NAPOMENA 1.: Brojčane vrijednosti $x_1 = x_2 = 0$ leže u središtu područja od interesa za inženjera elektrotehnike koje odgovara tzv. "prilagođenim" uvjetima za mjerilo snage koje se umjerava te prema tomu nikako ne čini krajnji slučaj.

NAPOMENA 2.: Zbog simetrije modela po veličinama X_1 i X_2 točno bi se pojavilo isto djelovanje kad bi se umjesto procjene x_1 uzela procjena x_2.

NAPOMENA 3.: Jedan razlog zašto se okvir nesigurnosti GUM-a može upotrebljavati u praksi (samo) s članovima prvog reda je to što je dostupna programska podrška za njegovu implementaciju: njome dobiveni rezultati mogu se katkad prihvatiti bez problema. Za slučaj kad je $x_1 = x_2 = 0$ (slika 11.) opasnost bi bila očita jer je izračunano da je standardna nesigurnost $u(\delta y)$ jednaka ništici te bi prema tomu svaki interval pokrivanja za δY bio ništične duljine za svaku vjerojatnost pokrivanja. Za $x_1 \neq 0$ (ili $x_2 \neq 0$), nesigurnost $u(\delta y)$ i duljina intervala pokrivanja za δY različite su od ništice tako da bez prethodnog znanja o vjerojatnim vrijednostima za $u(\delta y)$ i tu duljinu ne bi postojalo nikakvo upozorenje. Prema tomu opasnost u primjeni programske podrške koja se za te izračune temelji na okviru nesigurnosti GUM-a u tome je što provjere programske podrške za procjene x_1 ili x_2 koje su dostatno udaljene od ništice ne bi pokazivale takve probleme premda, kad bi se ta programska podrška naknadno upotrebljavala u praksi za male vrijednosti procjena x_1 ili x_2, rezultati ne bi bili valjani, ali bi možda nehotice bili prihvaćeni.

9.4.3 Prijenos i prikaz u sažetu obliku: neništična kovarijancija

9.4.3.1 Općenito

9.4.3.1.1 Tri pristupa koji se upotrebljavaju u slučajevima u kojima ulazne veličine X_i nisu korelirane (vidi podtočku 9.4.2) sada se primjenjuju na tri slučaja u kojima su korelirane, s koeficijentom korelacije $r(x_1, x_2) = 0{,}9$. Međutim upotrebljava se samo okvir nesigurnosti GUM-a s članovima prvog reda. Za razliku od slučajeva u kojima ulazne veličine X_i nisu korelirane, ne primjenjuje se okvir nesigurnosti GUM-a s članovima višeg reda. U GUM-u nije dan nikakav sličan primjer za okvir nesigurnosti GUM-a s članovima višeg reda za formulu koja sadržava članove višeg reda kad procjene ulaznih veličina x_i imaju pridružene neništične kovarijancije (vidi podtočku 5.8). Drugi se aspekti slažu s onima iz podtočke 9.4.2.

9.4.3.1.2 Za okvir nesigurnosti GUM-a s članovima prvog reda, nesigurnost $u(\delta y)$ određuje se prema opisu iz podtočke F.3.2. Izraz (F.7) iz te podtočke za $x_2 = 0$ daje:

$$u^2(\delta y) = 4x_1^2u^2(x_1).$$

Prema tomu $u(\delta y)$ ne ovisi o $r(x_1, x_2)$, a okvir nesigurnosti GUM-a s članovima prvog reda daje rezultate istovjetne rezultatima prikazanim u podtočki 9.4.2. Posebno je za slučaj $x_1 = 0$, (neispravno) izračunano da je $u(\delta y)$ jednako ništici kao u podtočki 9.4.2.2.1.

9.4.3.1.3 Metoda monte karlo primjenjivala se slučajnim uzorkovanjem iz veličine $\boldsymbol{X}$ opisane dvodimenzijskom Gaussovom funkcijom gustoće vjerojatnosti s danim matričnim očekivanjem i kovarijancijskom matricom [izrazi (27)]. Upotrijebljen je postupak iz podtočke C.5.

NAPOMENA: Za razliku od zahtjeva za izvlačenjem iz višedimenzijske razdiobe primjena metode monte karlo za ulazne korelirane veličine nije složenija kad su ulazne veličine nekorelirane.

9.4.3.2 Ulazne procjene $x_1 = 0$; 0,010 i 0,050

9.4.3.2.1 Dobiveni rezultati sadržani su u tablici 9. Rezultati dobiveni metodom monte karlo pokazuju da korelacija između ulaznih veličina X_i, premda ne utječe na procjenu δy, utječe na nesigurnost $u(\delta y)$ i to više za manje vrijednosti procjene x_1. U skladu s tim utječe na intervale pokrivanja s razinom pokrivanja od 95 %.

Tablica 9.: Rezultati gubitka za ulazne procjene s pridruženim neništičnim kovarijancijama ($r(x_1, x_2) = 0,9$) dobiveni analitički i uporabom okvira nesigurnosti GUM-a (GUF) i metodom monte karlo (podtočka 9.4.3.2.1)

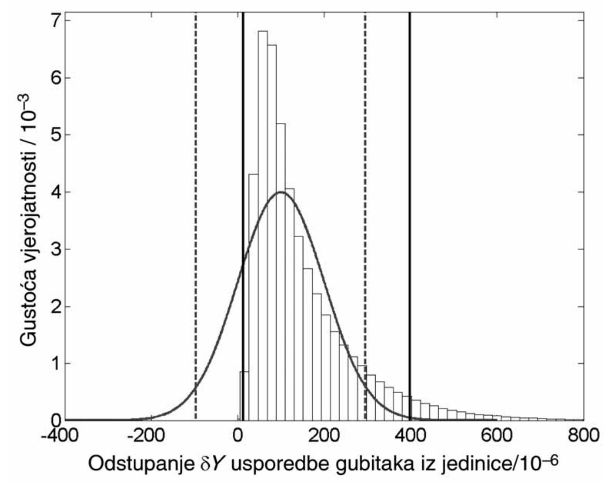
x_1	Procjena $u(\delta y)/10^{-6}$			Standardna nesigurnost $u(\delta y)/10^{-6}$			Najkraći interval pokrivanja s razinom pokrivanja od 95 % $\delta Y/10^{-6}$		
	Analit.	GUF	MCM	Analit.	GUF	MCM	Analit.	GUF	MCM
0,000	50	0	50	67	0	67	–	[0, 0]	[0, 185]
0,010	150	100	150	121	100	121	–	[–96, 296]	[13, 398]
0,050	2 550	2500	2 551	505	500	504	–	[1 520, 3 480]	[1 628, 3 555]

9.4.3.2.2 Slike 15. i 16. pokazuju funkcije gustoće vjerojatnosti dobivene okvirom nesigurnosti GUM-a s članovima prvog reda (zvonolika krivulja) i metodom monte karlo (normalizirane razdiobe frekvencija) redom za slučajeve $x_1 = 0,010$ i $x_2 = 0,050$. Također su prikazane krajnje točke najkraćeg intervala s razinom povjerenja od 95 % dane tim dvama pristupima kao isprekidane okomite crte za okvir nesigurnosti GUM-a i neprekidne okomite crte za metodu monte karlo.

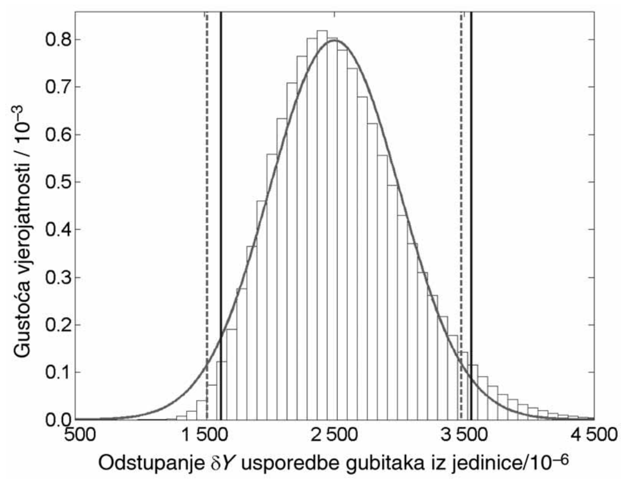
NAPOMENA: Strogo govoreći u tim okolnostima (vidi podtočku 5.8) [GUM:1995, G.6.6] slijedom primjene okvira nesigurnosti GUM-a nije ispunjen uvjet pod kojim se veličina δY može opisati Gaussovom funkcijom gustoće vjerojatnosti. Međutim prikazane su ta funkcija gustoće vjerojatnosti i krajnje točke koje odgovaraju intervalu pokrivanja s razinom pokrivanja od 95 %, jer se takav opis obično upotrebljava.

9.4.3.3 Rasprava

U slučaju $x_1 = 0,010$ (slika 15) djelovanje korelacije znatno je promijenilo rezultate dobivene metodom monte karlo (usporedi sa slikom 13.). Ne samo da je promijenjen oblik (aproksimacije) funkcije gustoće vjerojatnosti, nego odgovarajući interval pokrivanja nema više svoju lijevu krajnju točku u ništici. U slučaju $x_1 = 0,050$ (slika 16.) manje su očite (u usporedbi sa slikom 14.) razlike između rezultata za slučajeve u kojima su ulazne veličine nekorelirane i korelirane.



Slika 15.: Rezultati za model usporedbe gubitaka umjeravanja mjerila snage u slučaju $x_1 = 0{,}010$, $x_2 = 0$, s $u(x_1) = u(x_2) = 0{,}005$ **i** $r(x_1, x_2) = 0{,}9$ **(podtočke 9.4.3.2.2, 9.4.3.3)**



Slika 16.: Kao slika 15., osim što je $x_1 = 0{,}050$ **(podtočke 9.4.3.2.2 i 9.4.3.3)**

9.5 Umjeravanje planparalelne granične mjerke

9.5.1 Formuliranje: model

9.5.1.1 Duljina planparalelne granične mjerke nazivne duljine od 50 mm određuje se njezinom usporedbom s poznatim referentnim etalonom iste nazivne duljine. Izravni izlaz usporedbe dviju graničnih mjerka jednak je razlici d njihovih duljina koja je dana izrazom:

$$d = L(1 + \alpha\theta) - L_S(1 + \alpha_S\theta_S) \qquad (29)$$

gdje je L duljina planparalelne granične mjerke koja se umjerava na referentnoj temperaturi od 20 °C, L_S duljina referentnog etalona na referentnoj temperaturi od 20 °C, kako je dana u potvrdi o umjeravanju, α i α_S redom su koeficijenti toplinskog širenja granične mjerke koja se umjerava i referentnog etalona, a θ i θ_S odstupanja od referentne temperature od 20 °C redom granične mjerke koja se umjerava i referentnog etalona.

NAPOMENA 1.: Primjenjuje se samo za izdanje na engleskome jeziku. U GUM-u se na engleskome jeziku granična mjerka (end gauge) naziva mjerni blok ("gauge block").

NAPOMENA 2.: Za duljinu granične mjerke u ovoj se dopuni upotrebljava znak L umjesto znaka ℓ koji se za tu veličinu upotrebljava u GUM-u.

9.5.1.2 Iz izraza (29) izlazna je veličina L dana izrazom:

$$L = \frac{L_S(1+\alpha_S\theta_S)+d}{1+\alpha\theta}, \tag{30}$$

iz kojeg se dobiva aproksimacija koja je prikladna za najpraktičnije svrhe

$$L = L_S + d + L_S(\alpha_S\theta_S - \alpha\theta) \tag{31}$$

Ako se temperaturna razlika između granične mjerke koja se umjerava i referentne granične mjerke napiše kao $\delta q = \theta - \theta_S$, a razlika njihovih koeficijenata toplinskog širenja kao $\delta\alpha = \alpha - \alpha_S$, modeli (30) i (31) postaju redom:

$$L = \frac{L_S[1+\alpha_S(\theta-\delta\theta)]+d}{1+(\alpha_S+\delta\alpha)\theta} \tag{32}$$

i

$$L = L_S + d - L_S(\theta\delta\alpha - \alpha_S\delta\theta). \tag{33}$$

9.5.1.3 Razlika d duljina granične mjerke koja se umjerava i referentnog etalona određuje se kao prosječna vrijednost niza od pet pokazivanja razlike neovisno dobivenih uporabom umjerenoga komparatora. Razlika d može se izraziti kao:

$$d = D + d_1 + d_2 \tag{34}$$

gdje je D veličina čije je ostvarenje prosječna vrijednost od pet pokazivanja, a d_1 i d_2 veličine su koje opisuju redom slučajna i sustavna djelovanja pridružena uporabi komparatora.

9.5.1.4 Veličina θ koja predstavlja odstupanje temperature od 20 °C granične mjerke koja se umjerava može se izraziti kao:

$$\theta = \theta_0 + \Delta \tag{35}$$

gdje je θ_0 veličina koja predstavlja odstupanje prosječne temperature granične mjerke od 20 °C, a Δ veličina koja opisuje cikličke promjene odstupanja temperature od θ_0.

9.5.1.5 Uvrštenjem izraza (34) i (35) u izraze (32) i (33) i uvođenjem veličine δL koja predstavlja odstupanje duljine L od nazivne duljine:

$$L_{nom} = 50 \text{ mm}$$

granične mjerke, dobivaju se izrazi:

$$\delta L = \frac{L_s[1+\alpha_S(\theta_0+\Delta-\delta\theta)]+D+d_1+d_2}{1+(\alpha_S+\delta\alpha)(\theta_0+\Delta)} - L_{nom} \tag{36}$$

i

$$\delta L = L_S + D + d_1 + d_2 - L_S[\delta\alpha(\theta_0+\Delta) + \alpha_S\delta\theta] - L_{nom} \tag{37}$$

kao modeli za mjerni problem.

9.5.1.6 Ovdje se mjerni problem obrađuje s pomoću modela (36) i (37) s izlaznom veličinom δL i ulaznim veličinama L_S, D, d_1, d_2, α_S, θ_0, Δ, δa i $\delta\theta$. On se razlikuje od onoga danog u GUM-u, primjeru H.1, u tome što se u GUM-u s naprijed navedenim modelima (34) i (35) postupa kao s podmodelima modela (32) i (33), tj. na svaki od modela (34) i (35) primjenjuje se okvir nesigurnosti GUM-a s dobivenim rezultatima koji se upotrebljavaju za dobivanje podataka o ulaznim veličinama d i θ modela (32) i (33). Takvim se postupanjem ovdje izbjegava uporaba rezultata dobivenih iz metode monte karlo primijenjene na podmodele (34) i (35) za dobivanje podataka o razdiobama ulaznih veličina d i θ u izrazima (32) i (33).

9.5.2 Formuliranje: dodjela funkcija gustoće vjerojatnosti

9.5.2.1 Općenito

U sljedećim su podtočkama dani dostupni podatci o svakoj ulaznoj veličini modela (36) i (37). Ti su podatci uzeti iz opisa dana u GUM-u te je za svaki element podataka danih u GUM-u označena podtočka iz koje je element uzet. Dano je također tumačenje podataka u smislu dodjele razdiobe veličini. Tablica 10. daje sažet prikaz provedenih dodjela.

Tablica 10.: Funkcije gustoće vjerojatnosti ulaznih veličina za modele granične mjerke (36) i (37) na temelju dostupnih podataka (podtočka 9.5.2.1). Tablica 1. daje opće podatke koji se odnose na te funkcije gustoće vjerojatnosti

Veličina	PDF	Parametri					
		μ	σ	ν	a	b	d
L_S	$t_\nu(\mu, \sigma^2)$	50 000 623 nm	25 nm	18			
D	$t_\nu(\mu, \sigma^2)$	215 nm	6 nm	24			
d_1	$t_\nu(\mu, \sigma^2)$	0 nm	4 nm	5			
d_2	$t_\nu(\mu, \sigma^2)$	0 nm	7 nm	8			
α_S	R(a, b)				$9{,}5 \times 10^{-6}$ °C^{-1}	$13{,}5 \times 10^{-6}$ °C^{-1}	
θ_0	N(μ, σ^2)	–0,1 °C	0,2 °C				
Δ	U(a, b)				–0,5 °C	0,5 °C	
$\delta\alpha$	CTrap(a, b, d)				$-1{,}0 \times 10^{-6}$ °C^{-1}	$1{,}0 \times 10^{-6}$ °C^{-1}	$0{,}1 \times 10^{-6}$ °C^{-1}
$\delta\theta$	CTrap(a, b, d)				–0,050 °C	0,050 °C	0,025 °C

9.5.2.2 Duljina L_S referentnog etalona

9.5.2.2.1 Podatci

U potvrdi o umjeravanju dana je duljina referentnog etalona $\widehat{L_S}$ = 50,000 623 mm na temperaturi od 20 °C [GUM:1995, H.1.5]. U njoj je dana nesigurnost U_p = 0,075 µm kao povećana nesigurnost referentnog etalona te je navedeno da je bila dobivena uporabom faktora pokrivanja $k_p = 3$ [GUM:1995, H.1.3.1]. U potvrdi je navedeno da je broj stvarnih stupnjeva slobode pridružen sastavljenoj standardnoj nesigurnosti iz koje je dobivena navedena povećana nesigurnost, jednak $\nu_{\text{eff}}(u(\widehat{L_s})) = 18$ [GUM:1995, H.1.6].

9.5.2.2.2 Tumačenje

Veličini L_S dodjeljuje se normalizirana neusredištena t-razdioba $t_\nu(\mu, \sigma^2)$ (vidi podtočku 6.4.9.7) s parametrima:

$$\mu = 50\,000\,623 \text{ nm}, \quad \sigma = \frac{U_p}{k_p} = \frac{75}{3} \text{ nm} = 25 \text{ nm}, \quad \nu = 18.$$

9.5.2.3 Prosječna razlika duljina D

9.5.2.3.1 Podatci

Prosječna vrijednost $\widehat{D}$ od pet pokazivanja razlike između duljina granične mjerke koja se umjerava i referentnog etalona jednaka je 215 nm [GUM:1995, H.1.5]. Skupno eksperimentalno standardno odstupanje koje opisuje usporedbu duljina L i L_S određeno je iz 25 neovisno dobivenih pokazivanja razlike duljina dviju etalonskih graničnih mjerka i jednako je 13 nm [GUM:1995, H.1.3.2].

9.5.2.3.2 Tumačenje

Veličini D dodjeljuje se normalizirana neusredištena t-razdioba $t_\nu(\mu, \sigma^2)$ (vidi podtočke 6.4.9.2 i 6.4.9.6) s parametrima:

$$\mu = 215 \text{ nm}, \quad \sigma = \frac{13}{\sqrt{5}} \text{ nm} = 6 \text{ nm}, \quad \nu = 24$$

9.5.2.4 Slučajno djelovanje d_1 komparatora

9.5.2.4.1 Podatci

U skladu s potvrdom o umjeravanju komparatora koji se upotrebljava za usporedbu duljina L i L_S, pridružena nesigurnost zbog slučajnih djelovanja jednaka je 0,01 µm za vjerojatnost pokrivanja od 95 %, a dobivena je iz šest neovisno dobivenih pokazivanja [GUM:1995, H.1.3.2].

9.5.2.4.2 Tumačenje

Veličini d_1 dodjeljuje se normalizirana neusredištena t-razdioba $t_\nu(\mu, \sigma^2)$ (vidi podtočku 6.4.9.7) s parametrima:

$$\mu = 0 \text{ nm}, \quad \sigma = \frac{U_{0,95}}{k_{0,95}} = \frac{10}{2{,}57} \text{ nm} = 4 \text{ nm}, \quad \nu = 5$$

Tu je faktor pokrivanja $k_{0,95}$ dobiven iz tablice G.2 GUM-a s $\nu = 5$ stupnjeva slobode i vjerojatnošću pokrivanja $p = 0{,}95$.

9.5.2.5 Sustavno djelovanje d_2 komparatora

9.5.2.5.1 Podatci

Nesigurnost komparatora zbog sustavnih djelovanja dana je u potvrdi o umjeravanju kao 0,02 µm na "razini od tri sigma" [GUM:1995, H.1.3.2]. Ta se nesigurnost može smatrati pouzdanom 25 %, te je prema tomu broj stupnjeva slobode jednak $\nu_\mathrm{eff}(u(\hat{d}_2)) = 8$ [GUM:1995, H.1.6].

9.5.2.5.2 Tumačenje

Velični d_2 dodjeljuje se normalizirana neusredištena t-razdioba $t_\nu(\mu, \sigma^2)$ (vidi podtočku 6.4.9.7) s parametrima:

$$\mu = 0 \text{ nm}, \quad \sigma = \frac{U_p}{k_p} = \frac{20}{3} \text{ nm} = 7 \text{ nm}, \quad \nu = 8$$

9.5.2.6 Koeficijent toplinskog širenja α_S

9.5.2.6.1 Podatci

Koeficijent toplinskog širenja referentnog etalona dan je kao $\hat{\alpha}_\mathrm{S} = 11{,}5 \times 10^{-6}$ °C^{-1} s mogućim vrijednostima te veličine prikazanim pravokutnom razdiobom s granicama od $\pm 2 \times 10^{-6}$ °C^{-1} [GUM:1995, H.1.3.3].

9.5.2.6.2 Tumačenje

Koeficijentu α_S dodjeljuje se pravokutna razdioba R(a, b) (vidi podtočku 6.4.2) s granicama:

$$a = 9{,}5 \times 10^{-6} \text{ °C}^{-1}, \quad b = 13{,}5 \times 10^{-6} \text{ °C}^{-1}.$$

NAPOMENA: Nema podataka o pouzdanosti granica, te je tako dodijeljena pravokutna razdioba s točno poznatim granicama. Takvi podatci mogu biti izostavljeni iz opisa u GUM-u zbog toga što je odgovarajući koeficijent osjetljivosti jednak ništici, te tako ta veličina ne daje doprinos u primjeni okvira nesigurnosti GUM-a koji se temelji samo na članovima prvog reda.

9.5.2.7 Prosječno odstupanje temperature θ_0

9.5.2.7.1 Podatci

Temperatura ispitnog ležišta iskazana je kao (19,9 ± 0,5) °C. Za odstupanje prosječne temperature $\hat{\theta}_\mathrm{S} = -0{,}1$ °C dana je pridružena standardna nesigurnost zbog nesigurnosti pridružene prosječnoj temperaturi ispitnog ležišta $u(\hat{\theta}_\mathrm{S}) = 0{,}2$ °C [GUM:1995, H.1.3.4].

9.5.2.7.2 Tumačenje

Veličini θ_0 dodjeljuje se Gaussova razdioba $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ (vidi podtočku 6.4.7) s parametrima:

$$\mu = -0{,}1\ ^\circ\mathrm{C}, \quad \sigma = 0{,}2\ ^\circ\mathrm{C}.$$

NAPOMENA: Nema podataka o izvoru određivanja nesigurnosti, te je tako dodijeljena Gaussova razdioba. Vidi također napomenu iz podtočke 9.5.2.6.2 koja se odnosi na takve podatke.

9.5.2.8 Djelovanje Δ cikličke promjene temperature

9.5.2.8.1 Podatci

Temperatura ispitnog ležišta dana je u izvještaju kao (19,9 ± 0,5) °C. Za utvrđeni maksimalni pomak od 0,5 °C za veličinu Δ kaže se da predstavlja amplitudu približno ciklične promjene temperature pod djelovanjem termostatskog sustava. Ciklična promjena temperature daje U-razdiobu (arcussinus) [GUM:1995, H.1.3.4].

9.5.2.8.2 Tumačenje

Veličini Δ dodjeljuje se arcussinus razdioba $\mathrm{U}(a, b)$ (vidi podtočku 6.4.6) s granicama:

$$a = -0{,}5\ ^\circ\mathrm{C}, \quad b = 0{,}5\ ^\circ\mathrm{C}.$$

NAPOMENA: Nema podataka o pouzdanosti granica, te je tako dodijeljena U-razdioba s točno poznatim granicama. Kao u napomeni iz podtočke 9.5.2.6.2, takvi su se podatci mogli izostaviti iz opisa u GUM-u.

9.5.2.9 Razlika $\delta\alpha$ koeficijenata širenja

9.5.2.9.1 Podatci

Procijenjene granice promjenjivosti razlike koeficijenata širenja $\delta\alpha$ jednake su $\pm 1 \times 10^{-6}\ ^\circ\mathrm{C}^{-1}$ s jednakom vjerojatnošću da $\delta\alpha$ ima neku vrijednost u tim granicama [GUM:1995, H.1.3.5]. Za te se granice smatra da su pouzdane s 10 %, što daje $\nu(u(\widehat{\delta\alpha})) = 50$ [GUM:1995, H.1.6].

9.5.2.9.2 Tumačenje

Veličini $\delta\alpha$ dodjeljuje se pravokutna razdioba s granicama koje nisu točno propisane (vidi podtočku 6.4.3) s parametrima:

$$a = -1{,}0 \times 10^{-6}\ ^\circ\mathrm{C}^{-1}, \quad b = 1{,}0 \times 10^{-6}\ ^\circ\mathrm{C}^{-1}, \quad d = 0{,}1 \times 10^{-6}\ ^\circ\mathrm{C}^{-1}.$$

Navedena pouzdanost procijenjenih granica od 10 % daje temelj za tu vrijednost veličine d.

9.5.2.10 Razlika $\delta\theta$ temperatura

9.5.2.10.1 Podatci

Očekuje se da referentni etalon i granična mjerka koja se umjerava imaju istu temperaturu, ali bi temperaturna razlika $\delta\theta$ s jednakom vjerojatnošću mogla ležati bilo gdje u procijenjenome odsječku od –0,05 °C do 0,05 °C [GUM:1995, H.1.3.6]. Vjeruje se da je ta razlika pouzdana samo do 50 %, što daje $\nu(u(\widehat{\delta\theta})) = 2$ [GUM:1995, H.1.6].

9.5.2.10.2 Tumačenje

Veličini $\delta\theta$ dodjeljuje se pravokutna razdioba s granicama koje nisu točno propisane (vidi podtočku 6.4.3) s parametrima:

$$a = -0{,}050\ ^\circ\mathrm{C}, \quad b = 0{,}050\ ^\circ\mathrm{C}, \quad d = 0{,}025\ ^\circ\mathrm{C}.$$

Navedena pouzdanost od 50 % daje temelj za tu vrijednost veličine d.

9.5.3 Prijenos i prikaz u sažetu obliku

9.5.3.1 Okvir nesigurnosti GUM-a

Primjena okvira nesigurnosti GUM-a temelji se na:

– aproksimaciji modela (36) ili (37) članovima prvog reda razvoja u Taylorov red
– uporabi Welch-Satterthwaiteove formule za određivanje stvarnoga broja stupnjeva slobode (koji se zaokružuje na nižu cjelobrojnu vrijednost) pridružena nesigurnosti dobivenoj iz zakona prijenosa nesigurnosti i
– dodjeli izlaznoj veličini normalizirane i neusredištene t-razdiobe s brojem stupnjeva slobode iz prethodne alineje.

9.5.3.2 Metoda monte karlo

Primjena metode monte karlo

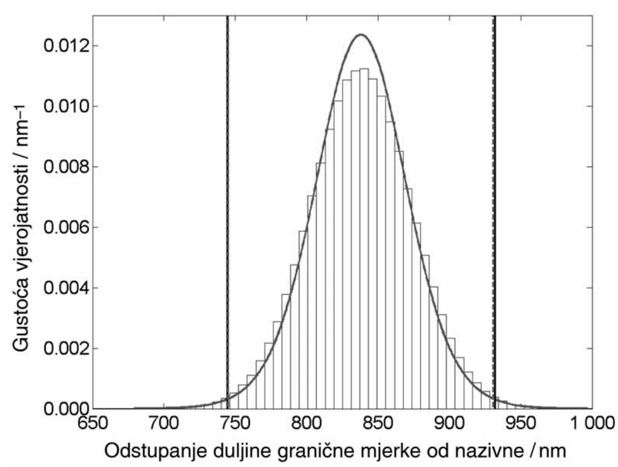
– zahtijeva uzorkovanje iz pravokutne razdiobe (vidi podtočke 6.4.2.4, C.3.3), Gaussove razdiobe (vidi podtočke 6.4.7.4, C.4), t-razdiobe (vidi podtočke 6.4.9.5, C.6), U-razdiobe (vidi podtočku 6.4.6.4) i pravokutne razdiobe s granicama koje nisu točno propisane (vidi podtočku 6.4.3.4) i
– primjene adaptivne metode monte karlo (vidi podtočku 7.9) s brojčanim dopuštenim odstupanjem ($\delta = 0{,}5$) utvrđenim da se u standardnoj nesigurnosti dobiju $n_{\mathrm{dig}} = 2$ značljive desetične znamenke.

9.5.4 Rezultati

9.5.4.1 Krajnje točke najkraćeg intervala pokrivanja s razinom pokrivanja od 99 % za odstupanje δL dobivene iz funkcija gustoće vjerojatnosti koje su prikazane okomitim crtama vizualno se ne mogu razlikovati. Razdioba dobivena iz okvira nesigurnosti GUM-a je t-razdioba s $\nu = 16$ stupnjeva slobode. Krajnje točke najkraćeg intervala pokrivanja s razinom pokrivanja od 99 % za odstupanje δL dobivene iz funkcija gustoće vjerojatnosti prikazane su

Tablica 11.: Rezultati dobiveni za aproksimaciju modela (37) uporabom podataka prikazanih u sažetom obliku u tablici 10. (podtočke 9.5.4.1 i 9.5.4.3)

Metoda	$\widehat{\delta L}$ / nm	$u(\widehat{\delta L})$ / nm	Najkraći interval pokrivanja s razinom pokrivanja od 99 % za $\widehat{\delta L}$ / nm
GUF	838	32	[745, 931]
MCM	838	36	[745, 932]



Slika 17.: Funkcije gustoće vjerojatnosti za δL dobivene uporabom okvira nesigurnosti GUM-a (neprekidna zvonolika krivulja) i metodom monte karlo (normalizirani histogram) za približni model (37) uporabom podataka sažeto prikazanih u tablici 10. (podtočka 9.5.4.1)

(isprekidanim) okomitim crtama (dobivenim iz okvira nesigurnosti GUM-a) i (neprekidnim) okomitim crtama (dobivenim metodom monte karlo).

9.5.4.2 Provedeno je $1{,}26 \times 10^6$ pokusa adaptivnim postupkom monte karlo. Provedeni su također izračuni za vjerojatnost pokrivanja od 95 %, za što je provedeno $0{,}53 \times 10^6$ pokusa.

9.5.4.3 Rezultati dobiveni za nelinearni model (36) istovjetni su rezultatima u tablici 11. do broja tamo danih desetičnih znamenaka.

9.5.4.4 Postoje neznatne razlike u dobivenim rezultatima. Nesigurnost $u(\widehat{\delta L})$ bila je 4 nm veća kod primjene metode monte karlo nego kod primjene okvira nesigurnosti GUM-a. Duljina intervala pokrivanja s razinom pokrivanja od 99 % za odstupanje $\widehat{\delta L}$ bila je veća za 1 nm. Ti se rezultati primjenjuju jednako na nelinearne i približne modele. Jesu li takve razlike važne treba prosuditi u skladu s njihovom uporabom.

Dodatak A

Povijesna perspektiva

A.1 GUM je bogat dokument koji obuhvaća mnoge aspekte određivanja nesigurnosti. Premda izravno ne govori o uporabi metode monte karlo takva je uporaba prihvaćena tijekom sastavljanja GUM-a. Nacrt (prvog izdanja) ISO-a/IEC-a/OIML-a/BIPM-a iz lipnja 1992., koji je izradila tehnička savjetodavna skupina ISO/TAG 4/WG 3, utvrđuje [G.1.5]:

> Ako je odnos između izlazne veličine Y i njezinih ulaznih veličina nelinearan ili ako postoje samo procjene vrijednosti parametara koji opisuju vjerojatnosti ulaznih veličina X_i (očekivanje, varijancija, momenti višeg reda), a one su same opisane razdiobama vjerojatnosti te razvoj toga odnosa u Taylorov red uz zadržavanje samo prvih članova razvoja nije prihvatljiva aproksimacija. Razdioba vjerojatnosti izlazne veličine Y ne može se izraziti konvolucijom. U tom će se slučaju općenito zahtijevati numerički pristup (kao npr. izračuni monte karlo), a određivanje je računski teže.

A.2 U objavljenoj verziji GUM-a ta je podtočka preinačena i glasi:

> Ako je funkcijski odnos između izlazne veličine Y i njezinih ulaznih veličina nelinearan, a razvoj te funkcije u Taylorov red uz zadržavanje samo prvih članova razvoja nije prihvatljiva aproksimacija (vidi podtočke 5.1.2 i 5.1.5), razdioba vjerojatnosti izlazne veličine Y ne može se dobiti konvolucijom razdioba ulaznih veličina. U takvim slučajevima zahtijevaju se druge analitičke ili numeričke metode.

A.3 Ovdje je ponovljeno tumačenje da "druge analitičke ili numeričke metode" obuhvaćaju svaki drugi odgovarajući pristup. To je tumačenje sukladno s tumačenjem Nacionalnog instituta za etalone i tehnologiju Sjedinjenih Država [50]:

> [6.6] Politika NIST-a daje sljedeće iznimke (vidi dodatak C):
>
> Podrazumijeva se da se svaka valjana statistička metoda koja je pod postojećim okolnostima tehnički provjerena može upotrebljavati za određivanje nesigurnosti istovrijednih nesigurnostima u_i, u_c ili U. Nadalje, priznaje se da međunarodni, nacionalni ili ugovorni sporazumi u kojima je NIST jedna strana mogu povremeno zahtijevati odstupanje od politike NIST-a. U oba slučaja u izvještaju o nesigurnosti mora se dokumentirati što je učinjeno i zašto.

Dodatak B

Koeficijenti osjetljivosti i bilance nesigurnosti

B.1 Iz prijenosa razdioba i njegove primjene uporabom metode monte karlo ne dobivaju se koeficijenti osjetljivosti [GUM:1995, 5.1.3]. Međutim ako se sve ulazne veličine osim jedne drže stalnima u njihovim najboljim procjenama, metoda monte karlo može se upotrijebiti za dobivanje funkcije gustoće vjerojatnosti izlazne veličine za model koji ima samo tu ulaznu veličinu kao varijablu [8]. Kao koeficijent osjetljivosti može se uzeti omjer standardnog odstupanja dobivenih vrijednosti modela (vidi podtočku 7.6) i standardne nesigurnosti pridružene toj najboljoj procjeni odgovarajuće ulazne veličine. Taj omjer odgovara onomu koji bi se dobio uzimanjem u račun svih članova višeg reda razvoja modela u Taylorov red. Taj se pristup može smatrati poopćenjem formule za aproksimaciju parcijalnih derivacija u GUM-u [GUM:1995, 5.1.3 napomena 2]. Koeficijenti osjetljivosti i doprinosi nesigurnosti pridruženi procjeni izlazne veličine za svaku ulaznu veličinu općenito će se razlikovati od onih dobivenih s pomoću GUM-a.

B.2 U mnogim kontekstima mjerenja opća je praksa da se daje popis sastavnica nesigurnosti $u_i(y) = |c_i|u(x_i)$, $i = 1, \ldots, N$, gdje je c_i i-ti koeficijent osjetljivosti, a $u(x_i)$ standardna nesigurnost pridružena procjeni x_i i-te ulazne veličine koja doprinosi standardnoj nesigurnosti $u(y)$. One se obično prikazuju u tablici "bilanca nesigurnosti". Ta praksa može biti korisna za utvrđivanje dominantnih članova koji doprinose nesigurnosti $u(y)$ pridruženoj procjeni izlazne veličine. Međutim, u slučajevima u kojima je (valjana primjena) prijenosa razdioba prikladnija, bilancu nesigurnosti treba smatrati kvalitativnim oruđem.

Dodatak C

Uzorkovanje iz razdioba vjerojatnosti

C.1 Općenito

C.1.1 Ovaj dodatak daje tehničke podatke koji se odnose na uzorkovanje iz razdioba vjerojatnosti. Takvo uzorkovanje čini središnji dio uporabe metode monte karlo kao primjene prijenosa razdioba. Može se također izvršiti uvid u digitalnu knjižnicu matematičkih funkcija [38] i repozitorij odgovarajuće programske podrške [37].

C.1.2 Generator za neku razdiobu kao što su razdiobe koje se razmatraju u podtočki 6.4 (vidi također tablicu 1.), može se načelno dobiti iz njezine funkcije razdiobe zajedno s uporabom generatora pravokutne razdiobe, kako je pokazano u podtočki C.2. Generator za pravokutnu razdiobu dan je u podtočki C.3.3. Za neke razdiobe, kao što su Gaussova i t-razdioba, djelotvornije je posebno razviti generatore kao što su oni dani u ovome dodatku. Podtočka 6.4 također daje savjet o uzorkovanju razdioba vjerojatnosti.

NAPOMENA: Mogu se upotrebljavati i generatori različiti od onih danih u ovome dodatku. Njihova se statistička kakvoća treba ispitati prije uporabe. Za generatore pseudoslučajnih brojeva za pravokutnu razdiobu postoje sredstva za ispitivanje. Vidi podtočku C.3.2.

C.2 Opće razdiobe

Izvlačenje iz strogo rastuće jednodimenzijske neprekidne funkcije razdiobe $G_X(\xi)$ može se provesti transformacijom izvlačenja iz pravokutne razdiobe:

a) iz pravokutne razdiobe R(0, 1) izvuče se slučajni broj ρ

b) odredi se vrijednost ξ koja zadovoljava jednadžbu $G_X(\xi) = \rho$.

NAPOMENA 1.: Inverziju koja se zahtijeva u koraku b), kojom se dobije $\xi = G_X^{-1}(\rho)$, može biti moguće provesti analitički. Inače se može provesti numerički.

PRIMJER: Kao primjer analitičke inverzije razmotrimo eksponencijalnu funkciju gustoće vjerojatnosti veličine X s X koje ima očekivanje x (> 0), tj. $g_X(\xi) = \exp(-\xi/x)/x$ za $\xi \geq 0$, a jednaka je ništici u drugim vrijednostima (vidi podtočku 6.4.10). Integracijom tada dobivamo $G_X(\xi) = 1 - \exp(-\xi/x)$, za $\xi \geq 0$, a ništicu u drugim vrijednostima. Prema tomu je $\xi = -x \ln(1-\rho)$. Taj se rezultat može pojednostavniti uporabom činjenice da ako varijabla Q ima pravokutnu razdiobu R(0, 1) tada tu razdiobu ima i varijabla $1 - Q$. Prema tomu je $\xi = -x \ln\rho$.

NAPOMENA 2.: Numerički ξ se može općenito dobiti određivanjem "ništice (korijena) funkcije" problema $G_X(\xi) - \rho = 0$. U tipičnom slučaju za ξ se može lako naći gornja i donja granica, pri čemu se za određivanje ξ može upotrebljavati prihvaćeni algoritam "ograđivanja" kao npr. bisekcija ili što je još djelotvornije, kombinacija linearne interpolacije i bisekcije [11].

NAPOMENA 3.: Kad generator pseudoslučajnih brojeva za pravokutnu razdiobu treba upotrebljavati kao temelj za generiranje brojeva iz druge razdiobe, pogrješka toga generatora može izazvati izvlačenje slučajnoga broja ρ jednaka ništici ili jedan. Primjer je eksponencijalna razdioba (vidi podtočku 6.4.10). Njezina funkcija gustoće vjerojatnosti [izraz (9)] nije definirana za slučajni broj ρ jednak ništici ili jedan. Uporaba generatora dana u podtočki C.3.3 ne bi izazvala pogrješku toga tipa.

C.3 Pravokutna razdioba

C.3.1 Općenito

C.3.1.1 Mogućnost generiranja pseudoslučajnih brojeva iz pravokutne razdiobe sama po sebi ima temeljno značenje, a također kao temelj za generiranje pseudoslučajnih brojeva iz bilo koje razdiobe (vidi podtočke C.2, C.4, C.6) uporabom odgovarajućeg algoritma ili formule. U potonjemu smislu kakvoća brojeva generiranih iz nepravokutne razdiobe ovisi o kakvoći generatora brojeva i o svojstvima upotrijebljenog algoritma. Prema tomu može se očekivati da je kakvoća brojeva generiranih iz nepravokutne razdiobe povezana s kakvoćom brojeva generiranih iz pravokutne razdiobe. Samo se za generator koji može dati vjerno pravokutno raspodijeljene brojeve koji se upotrebljava zajedno s dobrim algoritmom može očekivati da bude generator koji može vjerno dati brojeve koji nisu raspodijeljeni u skladu pravokutnom razdiobom.

C.3.1.2 Važno je dakle da je uređaj koji je temelj za generiranje brojeva raspodijeljenih u skladu s pravokutnom razdiobom valjan [31]. Ako korisnik nije siguran u njegovo podrijetlo, generator ne bi trebalo upotrebljavati sve dok se ne provede odgovarajuće ispitivanje. Inače se mogu dobiti pogrješni rezultati. Preporučuje se uporaba ispitnih sredstava [30]. U podtočki C.3.3 dan je postupak za generiranje brojeva raspodijeljenih u skladu s pravokutnom razdiobom za koji se pokazalo da se dobro ponaša u tim ispitivanjima te da se izravno primjenjuje.

C.3.1.3 Tablica C.1 definira odgovarajuće aspekte funkcioniranja postupka za generiranje pseudoslučajnih brojeva iz pravokutne razdiobe R(0, 1), specifikacijom ulaznih, ulazno-izlaznih i izlaznih parametara pridruženih njihovu određivanju.

NAPOMENA 1.: Postavljanjem početnih vrijednosti u tablici C.1 prema početnim vrijednostima koje su se prethodno upotrebljavale može se proizvesti isti niz slučajnih brojeva. To je važan dio ispitivanja regresije programske podrške koja se upotrebljava za provjeru sukladnosti rezultata proizvedenih uporabom te programske podrške s onima iz prijašnjih verzija.

NAPOMENA 2.: Neki generatori pseudoslučajnih brojeva daju jedno izvlačenje pri svakome zahtjevu, a drugi nekoliko izvlačenja.

Tablica C.1: Generiranje pseudoslučajnih brojeva iz pravokutne razdiobe (podtočke C.3.1.3 i C.3.2.2)

	Ulazni parametar
q	Broj pseudoslučajnih brojeva koje treba generirati
	Ulazno-izlazni parametar
t	Vektor stupac parametara od kojih se neki mogu zahtijevati kao ulazne veličine koje se mogu mijenjati kao dio izračuna. Naknadne vrijednosti tih parametara obično nisu neposredna briga korisnika. Potrebni su parametri za pomoć procesu upravljanja kojim se generiraju pseudoslučajni brojevi. Ti se parametri mogu ostvariti kao globalne varijable te se prema tomu ne pojavljuju eksplicitno kao parametri u postupku. Jedan ili više od tih parametara može biti početna vrijednost koja se upotrebljava za pokretanje niza slučajnih brojeva dobivenih uzastopnim pozivima postupka.
	Izlazni parametar
z	Vektor stupac od q izvlačenja iz pravokutne razdiobe R(0, 1)

C.3.1.4 Pseudoslučajni broj x izvučen iz razdiobe R(a, b) dan je izrazom $a + (b - a)z$, gdje je z pseudoslučajni broj izvučen iz razdiobe R(0, 1).

C.3.2 Ispitivanja slučajnosti

C.3.2.1 Svaki upotrijebljeni generator pseudoslučajnih brojeva treba:

a) imati dobra statistička svojstva

b) biti lako primjenjiv u svakomu programskom jeziku i

c) davati iste rezultate za iste početne vrijednosti na svakomu računalu.

Također je poželjno da bude kompaktan tako da zadrži izravnu primjenu. Jedan je takav generator koji približno zadovoljava te zahtjeve Wichmann i Hillov generator [52, 53]. On se upotrebljava u mnogim područjima, uključujući izračune nesigurnosti. Međutim duljina njegova ciklusa (broj slučajnih brojeva koje je generirao prije ponavljanja niza) koja je jednaka 2^{31}, danas se smatra neprikladnom za neke probleme. Osim toga nisu provedena sva ispitivanja njegovih statističkih svojstava [35]. Nadalje, generator je bio projektiran za 16-bitna računala, dok se danas gotovo općenito upotrebljavaju 32-bitna i 64-bitna računala.

NAPOMENA: Perioda niza brojeva proizvedenih generatorom pseudoslučajnih brojeva jednaka je broju uzastopnih brojeva u nizu prije njihova ponavljanja.

C.3.2.2 Šire ispitivanje statističkih svojstva nekoga generatora podvrgnuta ispitivanju provodi se ispitnim oruđem TestU01 [30]. To je oruđe veoma podrobno, s mnogo pojedinačnih ispitivanja, uključujući tzv. Big Crush. Wichmann i Hill [54] navode nekoliko generatora koji prolaze Big Crush ispitivanje. Poboljšani Wichmannov i Hillov generator (vidi podtočku C.3.3) također prolazi to ispitivanje te ima sljedeća svojstva [54]:

a) lako se kodira u bilo kojemu programskom jeziku, ne ovisi o promjeni bitovnih vrijednosti koju upotrebljavaju neki generatori
b) stanje (količina podataka koje generator čuva između poziva) maleno je i lako se njime rukuje (vidi parametar t u tablici C.1)
c) lako se može upotrebljavati za osiguranje više nizova potrebnih za veće paralelne primjene, koje će vjerojatno imati svojstva budućih izračuna nesigurnosti te
d) postoje varijante generatora za 32-bitna i 64-bitna računala.

C.3.3 Postupak za generiranje pseudoslučajnih brojeva iz pravokutne razdiobe

C.3.3.1 Kao i prethodni generator poboljšani Wichmann-Hillov generator kombinacija je kongruencijskih generatora. Novi generator kombinira četiri takva generatora, dok su se u prijašnjoj verziji kombinirala tri. Novi generator ima periodu od 2^{121} prihvatljivu za sve primjene koje se mogu zamisliti.

C.3.3.2 Tablica C.2 definira poboljšani Wichmann-Hillov generator za proizvodnju pseudoslučajnih brojeva iz razdiobe R(0, 1) za 32-bitno računalo.

Tablica C.2: Poboljšani Wichmann-Hillov generator pseudoslučajnih brojeva (podtočke C.3.3.2 i C.3.3.3) iz pravokutne razdiobe na odsječku (0, 1) za 32-bitno računalo. $\lfloor w \rfloor$ označuje najveći cijeli broj koji nije veći od w. $i_j \bmod b_j$ označuje ostatak dijeljenja i_j s b_j.

	Ulazni parametar
	Nijedan
	Ulazno-izlazni parametar
i_1, i_2, i_3, i_4	Cjelobrojni parametri koji se zahtijevaju kao ulazne veličine i koji se mijenjaju postupkom. Skup cijelih brojeva između 1 i 2 147 483 647 prije prvog poziva. Ne činite poremećaje između poziva. Iduće vrijednosti tih parametara obično se ne tiču korisnika. Parametri daju temelj kojim se generiraju pseudoslučajni brojevi. Oni se mogu ostvariti kao globalne varijable, te se prema tomu ne mogu pojavljivati izravno kao parametri postupka.
	Stalnica
$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$	Vektori cjelobrojnih stalnica dimenzije 1×4, gdje su $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_4)$, itd. dani su izrazom: $\boldsymbol{a} = (11\,600, 47\,003, 23\,000, 33\,000)$ $\boldsymbol{b} = (185\,127, 45\,688, 93\,368, 65\,075)$ $\boldsymbol{c} = (10\,379, 10\,479, 19\,423, 8\,123)$ $\boldsymbol{d} = 2\,147\,483\,123 \times (1, 1, 1, 1) + (456, 420, 300, 0)$ Ne provodi se poremećaj između poziva
	Izlazni parametar
r	Pseudoslučajni broj izvučen iz R(0, 1)
	Izračun
	a) Za $j = 1, \ldots, 4$ i) Iz $i_j = a_j \times (i_j \bmod b_j) - c_j \times \lfloor i_j/b_j \rfloor$ ii) Ako je $i_j < 0$, i_j se zamjenjuje s $i_j + d_j$ b) Daje $w = \sum_{j=1}^{4} i_j/d_j$ c) Daje $r = w - \lfloor w \rfloor$

C.3.3.3 Za 64-bitno računalo, korak a) izračunavanja, uključujući (i) i (ii) u generatoru iz tablice C.2 treba zamijeniti jednostavnijim korakom:

"a) Za $j = 1, \ldots, 4$ formira se $i_j = (a_j \times i_j) \bmod d_j$".

C.4 Gaussova razdioba

Postupak iz tablice C.3 daje izvlačenje iz standardne Gaussove razdiobe N(0, 1) uporabom Box-Mullerove transformacije [3]. Izvlačenje iz Gaussove razdiobe $N(\mu, \sigma^2)$ dano je izrazom $\mu + \sigma z$, gdje je z izvlačenje iz razdiobe N(0, 1).

Tablica C.3: Box-Mullerov Gaussov generator pseudoslučajnih brojeva (podtočka C.4)

Ulazni parametar	
	Nijedan
Izlazni parametar	
z_1 z_2	Dva izvlačenja dobivena neovisno iz standardne Gaussove razdiobe
Izračun	
	a) Generiranje slučajna izvlačenja r_1 i r_2 neovisno iz pravokutne razdiobe R(0, 1) b) Daje $z_1 = \sqrt{-2\ln r_1}\,\cos 2\pi r_2$ i $z_2 = \sqrt{-2\ln r_1}\,\sin 2\pi r_2$

C.5 Višedimenzijska Gaussova razdioba

C.5.1 Najvažnija je višedimenzijska razdioba (ili zajednička) Gaussova razdioba $\mathrm{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{V})$, gdje je μ vektor očekivanja dimenzije $n \times 1$, a $\boldsymbol{V}$ kovarijancijska matrica reda n.

C.5.2 Slučajni brojevi iz razdiobe $\mathrm{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{V})$ [45, 49] mogu se dobiti uporabom postupka iz tablice C.4.

NAPOMENA 1.: Ako je $\boldsymbol{V}$ pozitivno definirana (tj. ako su sve njezine vlastite vrijednosti strogo pozitivne), Choleskyjev je faktor $\boldsymbol{R}$ jedinstven [23, stranica 204].

NAPOMENA 2.: Ako matrica $\boldsymbol{V}$ nije pozitivno definirana možda zbog brojčanog zaokruživanja pogrješaka ili drugih izvora, $\boldsymbol{R}$ ne mora postojati. Osim toga u slučajevima u kojima je jedna ili više vlastitih vrijednosti matrice $\boldsymbol{V}$ veoma malena (ali pozitivna) primjenom programske podrške za upotrijebljeni Choleskyjev algoritam faktorizacije ne mora biti moguće formirati matricu $\boldsymbol{R}$ zbog djelovanja pogrješaka plivajućeg zareza. U svakoj se od tih situacija preporučuje da se $\boldsymbol{V}$ "popravi", tj. da se provede što je moguće manja promjena na $\boldsymbol{V}$ tako da Choleskyjev faktor $\boldsymbol{R}$ za preinačenu matricu bude dobro definiran. Dobiveni je faktor točan za matricu kovarijancije koja je numerički bliska izvornoj matrici $\boldsymbol{V}$. Za tu svrhu postoji jednostavni postupak popravka [49, stranica 322] te je uključen u generator MULTINORM [45].

NAPOMENA 3.: Ako je $\boldsymbol{V}$ semipozitivno definirana, može se provesti rastavljanje po vlastitim vrijednostima $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{Q}\Lambda\boldsymbol{Q}^\top$, gdje je $\boldsymbol{Q}$ ortogonalna matrica, a Λ dijagonalna matrica. Tada se $\Lambda^{1/2}\boldsymbol{Q}^\top$ može upotrijebiti za dobivanje izvlačenja iz razdiobe $\mathrm{N}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{V})$ čak kad je rang matrice manji od njezine dimenzije.

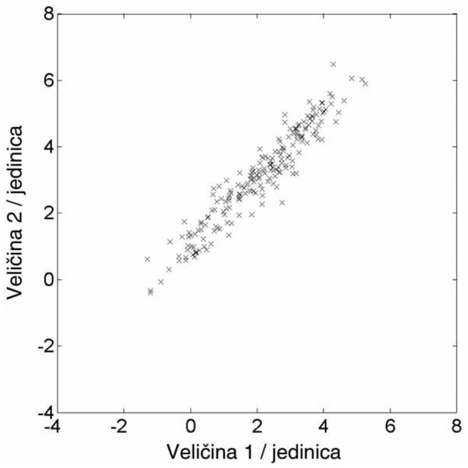
Tablica C.4.: Generator slučajnih brojeva višedimenzijske Gaussove razdiobe (podtočka C.5.2)

Ulazni parametar	
n	Dimenzija višedimenzijske Gaussove razdiobe
$\boldsymbol{\mu}$	Vektor očekivanja dimenzije $n \times 1$
$\boldsymbol{V}$	Kovarijancijska matrica reda $n \times n$
q	Broj pseudoslučajnih brojeva koje treba generirati za višedimenzijsku Gaussovu razdiobu
Izlazni parametar	
$\boldsymbol{X}$	Matrica dimenzije $n \times q$, čiji je j-ti stupac izvučen iz višedimenzijske Gaussove razdiobe
Izračun	
	a) Formira se Choleskyjev faktor $\boldsymbol{R}$ matrice $\boldsymbol{V}$, tj. gornja trokutna matrica koja zadovoljava uvjet $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{R}^\top\boldsymbol{R}$. (Za generiranje q pseudoslučajnih brojeva potrebno je provesti faktorizaciju te matrice samo jednom.) b) Generirati $n \times q$ niz $\boldsymbol{Z}$ standardnih Gaussovih varijabla c) Daje $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{1}^\top + \boldsymbol{R}^\top\boldsymbol{Z}$ gdje $\boldsymbol{1}$ označuje vektor stupac od $q \times 1$ jedinica.

C.5.3 Slika C.1 pokazuje 200 točaka generiranih uporabom generatora MULTNORM [45] iz razdiobe N($\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{V}$) gdje je:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 2{,}0 \\ 3{,}0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} 2{,}0 & 1{,}9 \\ 1{,}9 & 2{,}0 \end{bmatrix},$$

tj. u kojemu su dvije promatrane veličine pozitivno korelirane. Slični generatori postoje i drugdje [12].



Slika C.1: Točke uzorkovane iz dvodimenzijske Gaussove razdiobe s pozitivnom korelacijom (podtočke C.5.3 i C.5.4)

C.5.4 Na slici C.1 točke pokrivaju izduženu nagnutu elipsu. Kad bi izvandijagonalni elementi matrice $\boldsymbol{V}$ bili zamijenjeni ništicama, te bi točke pokrivale krug. Kad bi dijagonalni elementi postali nejednaki, a izvandijagonalni elementi zadržali na ništici, te bi točke pokrivale elipsu čije su osi paralelne s osima grafikona. Kad bi dijagonalni elementi bili negativni te prema tomu dotične veličine, negativno korelirane glavna os elipse imala bi negativan, a ne pozitivan nagib.

C.6 *t*-razdioba

Postupak iz tablice C.5 daje pristup [29], [44, stranica 63] za dobivanje izvlačenja iz *t*-razdiobe s ν brojeva slobode.

Tablica C.5.: Generator pseudoslučajnih brojeva *t*-razdiobe (podtočka C.6)

	Ulazni parametar
ν	stupnjeva slobode
	Izlazni parametar
t	Izvlačenje iz *t*-razdiobe s ν stupnjeva slobode
	Izračun
	a) Generiraju se dva izvlačenja r_1 i r_2 neovisno iz pravokutne razdiobe R(0, 1) b) Ako je $r_1 < 1/2$, formira se $t = 1/(4r_1 - 1)$ i $\upsilon = r_2/t^2$, inače se formira $t = 4r_1 - 3$ i $\upsilon = r_2$ c) Kad je $\upsilon < 1 - \lvert t \rvert/2$ ili $\upsilon < (1 + t^2/\nu)^{-(\nu+1)/2}$ prihvati se t kao izvlačenje iz *t*-razdiobe; inače se ponavlja iz koraka a)

NAPOMENA: ν mora biti veće od dva za standardno odstupanje *t*-razdiobe s ν stupnjeva slobode da bi bilo konačno.

Dodatak D

Aproksimacija funkcije razdiobe izlazne veličine neprekidnim krivuljama

D.1 Katkad je korisno raditi s neprekidnom aproksimacijom $\tilde{G}_Y(\eta)$, recimo funkcije razdiobe izlazne veličine Y, a ne s diskretnim prikazom $\boldsymbol{G}$ iz podtočke 7.5.

NAPOMENA: Rad s neprekidnom aproksimacijom znači npr. da se:

a) uzorkovanje iz funkcije razdiobe može provoditi bez potrebe zaokruživanja kao u diskretnome slučaju te da se

b) za određivanje najkraćeg intervala pokrivanja mogu upotrebljavati numeričke metode za čiju se primjenu zahtijeva neprekidnost.

D.2 Da bi se formirala funkcija razdiobe $\tilde{G}_Y(\eta)$ promatrajmo diskretni prikaz $\boldsymbol{G} = \{y_{(r)}, r = 1, ..., M\}$ razdiobe $G_Y(\eta)$ iz podtočke 7.5.1 po potrebi nakon zamjene replike modela vrijednostima $y_{(r)}$ [korak b) u toj podtočki]. Tada se provode sljedeći koraci:

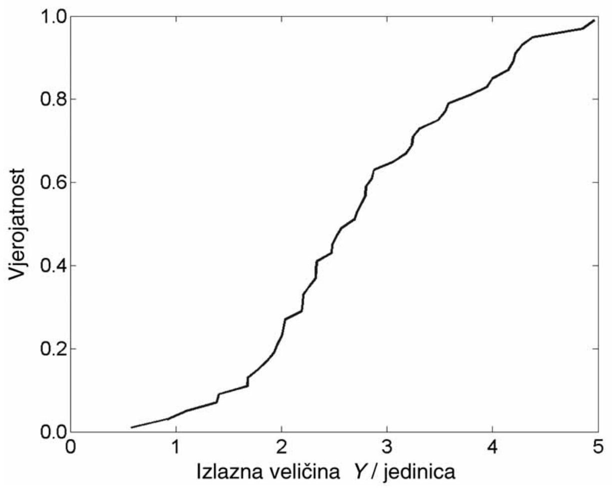
a) vrijednostima $y_{(r)}$ dodjeljuju se jednoliko razmaknute kumulativne vjerojatnosti $p_r = (r - 1/2)/M$, $r = 1, ..., M$ [8]. Brojčane vrijednosti p_r, $r = 1, ..., M$ središnje su točke od M susjednih intervala vjerojatnosti širine $1/M$ između ništice i jedan;

b) formira se neprekidna aproksimacija $\tilde{G}_Y(\eta)$ kao (neprekidna) strogo rastuća po odsječcima linearna funkcija koja povezuje M točaka $(y_{(r)}, p_r)$, $r = 1, ..., M$:

$$\tilde{G}_Y(\eta) = \frac{r - 1/2}{M} + \frac{\eta - y_{(r)}}{M(y_{(r+1)} - y_{(r)})}, \quad y_{(r)} \le \eta \le y_{(r+1)}, \quad r = 1, ..., M-1 \tag{D.1}$$

NAPOMENA: Oblik izraza (D.1) daje prikladan temelj za uzorkovanje iz neprekidne aproksimacije $\tilde{G}_Y(\eta)$ za svrhe iduće faze određivanja nesigurnosti. Vidi podtočku C.2 za inverzno uzorkovanje iz funkcije razdiobe. Neke knjižnice i paketi programske podrške daju oruđa za po odsječcima linearnu interpolaciju. Budući da je $\tilde{G}_Y(\eta)$ po odsječcima linearna funkcija, a time i njezina inverzna funkcija, takva se oruđa mogu lako primijeniti.

D.3 Slika D.1 prikazuje neprekidnu aproksimaciju $\tilde{G}_Y(\eta)$ dobivenu uporabom metode monte karlo na temelju $M = 50$ vrijednosti uzorkovanih iz Gaussove funkcije gustoće vjerojatnosti $g_Y(\eta)$, pri čemu veličina Y ima očekivanje 3 i standardno odstupanje 1.



Slika D.1: Aproksimacija $\tilde{G}_Y(\eta)$ funkcije razdiobe $G_Y(\eta)$ (podtočka D.3). "Jedinica" označuje bilo koju jedinicu.

D.4 Promatrajmo $\tilde{g}_Y(\eta) = \tilde{G}'_Y(\eta)$ s $\tilde{G}_Y(\eta)$ danim izrazom (D.1). Funkcija $\tilde{g}_Y(\eta)$ ima po odsječcima stalne vrijednosti s točkama loma u $\eta = y_{(1)}, \ldots, y_{(M)}$. Očekivanje $\tilde{y}$ i standardno odstupanje $u(\tilde{y})$ izlazne veličine Y koji su opisani s pomoću funkcije gustoće vjerojatnosti $\tilde{g}_Y(\eta)$, uzimaju se redom kao procjena izlazne veličine Y i standardna nesigurnost pridružena toj procjeni. Procjena $\tilde{y}$ i nesigurnost $u(\tilde{y})$ dani su izrazom:

$$\tilde{y} = \frac{1}{M}\sum_{r=1}^{M}{}'' y_{(r)} \tag{D.2}$$

i

$$u^2(\tilde{y}) = \frac{1}{M}\left(\sum_{r=1}^{M}{}''(y_{(r)} - \tilde{y})^2 - \frac{1}{6}\sum_{r=1}^{M-1}(y_{(r+1)} - y_{(r)})^2\right), \tag{D.3}$$

gdje dvostruka crtica uz znak zbrajanja pokazuje da se prvi i posljednji članovi u zbroju uzimaju s težinom od jedne polovine.

NAPOMENA: Za dostatno veliku vrijednost broja pokusa M (recimo 10^5 ili veću), procjena $\tilde{y}$ i nesigurnost $u(\tilde{y})$ dobivene uporabom formule (D.2) i (D.3) ne bi se općenito razlikovale za praktične svrhe od procjene i nesigurnosti danih redom formulama (16) i (17).

D.5 Neka α označuje bilo koju vrijednost između ništa i $1 - p$, gdje je p zahtijevana vjerojatnost pokrivanja (npr. 0,95). Krajnje točke intervala pokrivanja s razinom pokrivanja od $100p$ % mogu se dobiti iz aproksimacije $\tilde{G}(\eta)$ inverznom linearnom interpolacijom. Za određivanje donje rubne točke y_{low} takve da je $\alpha = \tilde{G}_Y(y_{\text{low}})$, označimo indeksom r točke $((y_{(r)}, p_r))$ i $((y_{(r+1)}, p_{r+1}))$ koje zadovoljavaju:

$$p_r \le \alpha < p_{r+1}.$$

Tada se inverzijom linearne interpolacije dobije:

$$y_{\text{low}} = y_{(r)} + (y_{(r+1)} - y_{(r)})\,\frac{\alpha - p_r}{p_{r+1} - p_r}$$

Slično se gornja rubna točka y_{high} određuje tako da se $p + \alpha = \tilde{G}_Y(y_{\text{high}})$ izračunava iz izraza:

$$y_{\text{high}} = y_{(s)} + (y_{(s+1)} - y_{(s)})\,\frac{p + \alpha - p_s}{p_{s+1} - p_s},$$

gdje je indeks s takav da točke $((y_{(s)}, p_s))$ i $((y_{(s+1)}, p_{s+1}))$ zadovoljavaju uvjet:

$$p_s \le p + \alpha < p_{s+1}.$$

D.6 Odabirom vrijednosti $\alpha = 0{,}025$ dobiva se interval pokrivanja definiran kvantilima od 0,025 i 0,975. Taj odabir osigurava vjerojatnosno simetričan interval pokrivanja s razinom pokrivanja od 95 % za veličinu Y.

D.7 Najkraći se interval općenito može dobiti iz neprekidne aproksimacije $\tilde{G}_Y(\eta)$ određivanjem vrijednosti α tako da izraz $\tilde{G}_Y^{-1}(p+\alpha) - \tilde{G}_Y^{-1}(\alpha) = H(\alpha)$ bude minimalan. Izravni numerički pristup određivanja minimuma određivanje je $H(\alpha)$ za veliki broj jednolično razmaknutih odabira $\{\alpha_k\}$ vrijednosti α između ništice i $1 - p$ i odabrati α_l iz skupa $\{\alpha_k\}$ koje daje minimum u skupu $\{H(\alpha_k)\}$.

D.8 Izračun intervala pokrivanja olakšava se ako je pM cijeli broj. Tada je brojčana vrijednost α, za koju $H(\alpha)$ ima najmanju vrijednost, jednaka r^*/M, gdje je r^* indeks r takav da duljina intervala $y_{(r+pM)} - y_{(r)}$ na $r = 1, \ldots, (1-p)M$ bude najmanja.

Dodatak E

Interval pokrivanja za četverostruku konvoluciju pravokutne razdiobe

E.1 U podtočki 9.2.3.2 dobiveno je analitičko rješenje

$$\pm 2\sqrt{3}\,[2 - (3/5)^{1/4}] \approx \pm 3{,}88. \tag{E.1}$$

Ono čini rubne točke vjerojatnosno simetrična intervala pokrivanja s razinom pokrivanja od 95 % izlazne veličine Y u aditivnome modelu koji ima četiri ulazne veličine s ništičnim očekivanjima i jediničnim standardnim odstupanjima, čije su funkcije gustoće vjerojatnosti istovjetne pravokutne razdiobe. Taj je rezultat utvrđen u ovome dodatku.

E.2 Pravokutna razdioba R(a, b) (vidi podtočku 6.4.2) poprima stalnu vrijednost $(b - a)^{-1}$ za $a \le \rho \le b$, a u ostalim je slučajevima ništica. n-struka konvolucija razdiobe R(0, 1) je B-spline* $B_n(\rho)$ reda n (stupnja $n - 1$) s čvorovima 0, …, n [46]. Eksplicitni izraz je [6]:

$$B_n(\rho) = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{r=0}^{n} {}^{n}C_r(-1)^r(\rho - r)_+^{n-1},$$

gdje je

$${}^{n}C_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}, \quad z_+ = \max(z, 0)\,.$$

Posebno,

$$B_4(\rho) = \frac{1}{6}\rho^3, \quad 0 \le \rho \le 1$$

(s različitim izrazima za kubične polinome za $B_4(\rho)$ u drugim intervalima između susjednih čvorova) i prema tomu:

$$\int_0^1 B_4(\rho)d\rho = \left[\frac{1}{24}\rho^4\right]_0^1 = \frac{1}{24} \approx 0{,}0417.$$

E.3 Lijeva rubna točka y_{low} vjerojatnosno simetrična intervala pokrivanja s razinom pokrivanja od 95 % leži između ništice i jedan jer:

$$0{,}025 = \frac{1}{40} < \frac{1}{24}$$

Ploštine ispod funkcije gustoće vjerojatnosti leži lijevo od rubne točke y_{low} koja je prema tomu dana izrazom:

$$\int_0^{y_{\text{low}}} B_4(\rho)d\rho = \frac{1}{24}y_{low}^4 = \frac{1}{40},$$

tj.

$$y_{\text{low}} = (3/5)^{1/4},$$

* B-spline posebna je funkcija definirana po odsječcima polinomima. U problemima interpolacije često se daje prednost spline interpolaciji u odnosu na interpolaciju polinomima jer daje slične rezultate čak kad se upotrebljavaju polinomi nižeg stupnja, pri čemu se izbjegava Rungeov pojav za više stupnjeve. Naziv spline dolazi iz uređaja s fleksibilnim splineom (klinom) koje upotrebljavaju brodograditelji i tehnički crtači za povlačenje glatkih oblika. (napomena prevoditelja)

Na temelju simetrije desna je rubna točka jednaka:

$$y_{\text{high}} = 4 - (3/5)^{1/4} .$$

Prema tomu vjerojatnosno simetričan interval pokrivanja s razinom pokrivanja od 95 % jednak je:

$$[(3/5)^{1/4}, 4 - (3/5)^{1/4}] \equiv 2 \pm (2 - (3/5)^{1/4}) .$$

Odgovarajući interval pokrivanja za četverostruku konvoluciju pravokutne funkcije gustoće vjerojatnosti $\mathrm{R}(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ (koja ima ništično očekivanje i jedinično standardno odstupanje) dan je pomakom toga rezultata za dvije jedinice i njegovom normalizacijom s $2\sqrt{3}$ jedinice, što daje izraz (E.1).

Dodatak F

Usporedba problema gubitaka

Ovaj se dodatak bavi nekim pojedinostima usporedbe problema gubitaka (vidi podtočku 9.4). Podtočka F.1 daje očekivanje i standardno odstupanje veličine δY (vidi podtočku 9.4.2.1.2). Podtočka F.2 daje funkciju gustoće vjerojatnosti za veličinu δY analitički kad je $x_1 = x_2 = r(x_1, x_2) = 0$ (vidi podtočku 9.4.2.1.2). U podtočki F.3 primjenjuje se okvir nesigurnosti GUM-a za nekorelirane i korelirane ulazne veličine (vidi podtočke 9.4.2.1.3, 9.4.3.1.1).

F.1 Očekivanje i standardno odstupanje dobiveno analitički

F.1.1 Varijancija veličine X može se izraziti s pomoću očekivanja [42, stranica 124]

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 .$$

Prema tomu

$$E(X^2) = [E(X)]^2 + V(X) = x^2 + u^2(x) ,$$

gdje je x najbolja procjena veličine X, a $u(x)$ standardna nesigurnost pridružena procjeni x. Prema tomu, za model (28), tj. za $\delta Y = 1 - Y = X_1^2 + X_2^2$, dobiva se

$$\delta y = E(\delta Y) = x_1^2 + x_2^2 + u^2(x_1) + u^2(x_2).$$

Taj se rezultat primjenjuje

(a) bez obzira na to koje su funkcije gustoće vjerojatnosti dodijeljene veličinama X_1 i X_2 i

(b) bez obzira na to jesu li veličine X_1 i X_2 neovisne ili nisu.

F.1.2 Standardna nesigurnost pridružena procjeni δy može se dobiti iz izraza:

$$u^2(\delta y) = u^2(x_1^2) + u^2(x_2^2) + 2u(x_1^2, x_2^2),$$

gdje su za $i = 1$ i $i = 2$, $u^2(x_i^2) = V(X_i^2)$ i $u(x_1^2, x_2^2) = \mathrm{Cov}(X_1^2, X_2^2)$. Tada primjenom Priceova teorema za Gaussove razdiobe [40, 41], dobivamo:

$$u^2(\delta y) = 4u^2(x_1)x_1^2 + 4u^2(x_2)x_2^2 + 2u^4(x_1) + 2u^4(x_2) + 4u^2(x_1, x_2) + 8u(x_1, x_2)x_1x_2. \tag{F.1}$$

Kad je $x_2 = 0$ i $u(x_1) = u(x_2)$ te zamjenom $u(x_1, x_2)$ s $r(x_1, x_2)u^2(x_1)$, dobiva se:

$$u(\delta y) = 2\{x_1^2 + [1 + r^2(x_1, x_2)]u^2(x_1)\}^{1/2}u(x_1).$$

F.1.3 Kad su ulazne veličine X_1 i X_2 nekorelirane, tj. kad je $u(x_1, x_2) = 0$, izraz (42) postaje:

$$u^2(\delta y) = 4u^2(x_1)x_1^2 + 4u^2(x_2)x_2^2 + 2u^4(x_1) + 2u^4(x_2). \tag{F.2}$$

Izraz (F.2) može se provjeriti primjenom formule (10) iz GUM-a [GUM:1995, 5.1.2] i neposredno primjenom formule GUM-a [GUM:1995, 5.1.2 napomena].

F.2 Analitičko rješenje za ništičnu vrijednost koeficijenta refleksije napona koji ima pridruženu ništičnu kovarijanciju

F.2.1 Za slučaj $x_1 = x_2 = r(x_1, x_2) = 0$ i $u(x_1) = u(x_2)$, funkcija gustoće vjerojatnosti $g_Y(\eta)$ veličine Y može se dobiti analitički. Vrijedno je imati takvo rješenje za svrhu validacije. U gornjim je okolnostima:

$$\delta Y = u^2(x_1)\left[\frac{X_1^2}{u^2(x_1)} + \frac{X_2^2}{u^2(x_2)}\right].$$

F.2.2 Neka je član u uglatim zagradama zbroj (Z) kvadrata dviju neovisnih veličina od kojih je svaka raspodijeljena kao standardna Gaussova funkcija gustoće vjerojatnosti. Prema tomu taj je zbroj raspodijeljen u skladu s razdiobom χ^2 s dva stupnja slobode [42, str. 177], tako da je:

$$\delta Y = u^2(x_1)Z\,,$$

gdje Z ima funkciju gustoće vjerojatnosti:

$$g_Z(z) = \chi_2^2(z) = \mathrm{e}^{-z/2}/2.$$

F.2.3 Primjena opće formule [42, str. 57-61] za funkciju gustoće vjerojatnosti derivabilne i strogo padajuće funkcije varijable (ovdje Z) sa specificiranom funkcijom gustoće vjerojatnosti daje:

$$g_Y(\eta) = \frac{1}{u^2(x_1)}\chi_2^2\left(\frac{\eta}{u^2(x_1)}\right) = \frac{1}{2u^2(x_1)}\exp\left(-\frac{\eta}{2u^2(x_1)}\right), \quad \eta \geq 0.$$

F.2.4 Očekivanje veličine δY dano je izrazom:

$$\delta y = E(\delta Y) = \int_0^\infty \eta g_Y(\eta)\mathrm{d}\eta = 2u^2(x_1)\,,$$

a varijancija

$$u^2(\delta y) = V(\delta Y) = \int_0^\infty (\eta - y)^2 g_Y(\eta)\mathrm{d}\eta = 4u^4(x_1)\,,$$

tj. standardno odstupanje jednako je $2u^2(x_1)$, rezultati koji su sukladni s onima iz podtočke F.1.

F.2.5 Integracijom odgovarajuća je funkcija razdiobe jednaka:

$$G_Y(\eta) = 1 - \exp\left(-\frac{\eta}{2u^2(x_1)}\right), \quad \eta \geq 0. \tag{F.3}$$

F.2.6 Neka je δy_α ona vrijednost η u izrazu (F.3) koja odgovara izrazu $G_Y(\eta) = \alpha$ za neko α koje zadovoljava odnos $0 \leq \alpha \leq 1 - p$. Tada je:

$$\delta y_\alpha = -2u^2(x_1)\ln(1 - \alpha)\,, \tag{F.4}$$

a interval pokrivanja s razinom pokrivanja od $100p$ % za veličinu δY (vidi podtočku 7.7) jednak je:

$$[\delta y_\alpha, \delta y_{p+\alpha}] \equiv [-2u^2(x_1)\ln(1-\alpha), \ -2u^2(x_1)\ln(1-p-\alpha)]$$

s duljinom:

$$H(\alpha) = -2u^2(x_1)\ln\left(1 - \frac{p}{1-\alpha}\right)$$

F.2.7 Najkraći interval pokrivanja s razinom pokrivanja od $100p$ % dobiva se određivanjem vjerojatnosti α za koju $H(\alpha)$ ima najmanju vrijednost (vidi podtočku 5.3.4). Budući da je $H(\alpha)$ strogo rastuća funkcija varijable α za $0 \leq \alpha \leq 1 - p$, $H(\alpha)$ ima najmanju vrijednost kad je $\alpha = 0$. Prema tomu najkraći interval pokrivanja s razinom pokrivanja od $100p$ % za veličinu δY jednak je:

$$[0, -2u^2(x_1)\ln(1-p)]\,.$$

Za $u(x_1) = 0{,}005$ najkraći interval pokrivanja s razinom pokrivanja od 95 % jednak je:

$$[0; 0{,}000\,149\,8]\,.$$

F.2.8 Vjerojatnosno simetričan interval pokrivanja s razinom pokrivanja od 95 % za veličinu δY dobiva se stavljanjem $\alpha = (1 - p)/2$ (vidi podtočku 5.3.3), tj.

$$[-2u^2(x_1)\ln 0{,}975, -2u^2(x_1)\ln 0{,}025] = [0{,}000\,001\,3; 0{,}000\,184\,4]\,,$$

koji je 20 % širi od najkraćeg intervala s razinom pokrivanja od 95 %.

NAPOMENA: Gornja analiza primjer je analitičkoga pristupa koji se može primijeniti na neke probleme toga tipa. U tom bi se posebnom slučaju rezultati u stvari mogli dobiti izravnije jer je $g_Y(\eta)$ strogo rastuća, a najuži interval pokrivanja uvijek je u području najveće gustoće.

F.3 Okvir nesigurnosti GUM-a primijenjen na problem usporedbe gubitaka

F.3.1 Nekorelirane ulazne veličine

F.3.1.1 Problem usporedbe gubitka razmatran u podtočki 9.4 imao je kao model mjerenja

$$\delta Y = f(\boldsymbol{X}) = f(X_1, X_2) = X_1^2 + X_2^2,$$

gdje su veličinama X_1 i X_2 dodijeljene Gaussove funkcije gustoće vjerojatnosti koje redom imaju očekivanja x_1 i x_2 i varijancije $u^2(x_1)$ i $u^2(x_2)$.

F.3.1.2 Primjena podtočke 5.1.1 GUM-a daje:

$$\delta y = x_1^2 + x_2^2,$$

kao procjenu veličine δY. Jedine netrivijalne neništične parcijalne derivacije modela su, za $i = 1, 2$,

$$\frac{\partial f}{\partial X_i} = 2X_i, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial X_i^2} = 2.$$

F.3.1.3 Prema tomu primjena podtočke 5.1.2 GUM-a daje za standardnu nesigurnost $u(\delta y)$:

$$u^2(\delta y) = \left.\left[\left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\right)^2 u^2(x_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial X_2}\right)^2 u^2(x_2)\right]\right|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}} = 4x_1^2u^2(x_1) + 4x_2^2u^2(x_2)\ , \tag{F.5}$$

koja se temelji na aproksimaciji članovima prvog reda razvoja u Taylorov red funkcije $f(\boldsymbol{X})$. Ako je funkcija f veoma nelinearna [GUM:1995, 5.1.2 napomena] član:

$$\left.\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial X_2^2}\right]\right|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}} u^2(x_1)\, u^2(x_2)$$

treba dodati formuli (F.5), čime formula (F.5) postaje:

$$u^2(\delta y) = 4x_1^2u^2(x_1) + 4x_2^2u^2(x_2) + 4u^2(x_1)u^2(x_2)\ . \tag{F.6}$$

F.3.1.4 Interval pokrivanja s razinom pokrivanja od 95 % za veličinu δY dan je izrazom:

$$\delta y \pm 2u(\delta y),$$

što je posljedica činjenice da veličina δY ima Gaussovu funkciju gustoće vjerojatnosti.

F.3.2 Korelirane ulazne veličine

F.3.2.1 Kad su ulazne veličine korelirane, matrica nesigurnosti za najbolje procjene ulaznih veličina dana je formulom (27).

F.3.2.2 Primjena podtočke 5.2.2 iz GUM-a daje:

$$u^2(\delta y) = \left.\left[\left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\right)^2 u^2(x_1) + \left(\frac{\partial f}{\partial X_2}\right)^2 u^2(x_2) + 2\frac{\partial f}{\partial X_1}\frac{\partial f}{\partial X_2} r(x_1, x_2)u(x_1)u(x_2)\right]\right|_{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}}$$

$$= 4x_1^2u^2(x_1) + 4x_2^2u^2(x_2) + 8r(x_1, x_2)x_1x_2u(x_1)u(x_2) \tag{F.7}$$

Dodatak G

Rječnik glavnih znakova

A	slučajna varijabla koja predstavlja donju granicu pravokutne razdiobe s granicama koje nisu točno propisane
a	donja granica intervala u kojemu je poznato da leži slučajna varijabla
a	središte intervala u kojemu je poznato da leži donja granica A pravokutne razdiobe s granicama koje nisu točno propisane
B	slučajna varijabla koja predstavlja gornju granicu pravokutne razdiobe s granicama koje nisu točno propisane
b	gornja granica intervala u kojemu je poznato da leži slučajna varijabla
b	središte intervala u kojemu je poznato da leži gornja granica B pravokutne razdiobe s granicama koje nisu točno propisane
$\mathrm{CTrap}(a, b, d)$	pravokutna razdioba s granicama koje nisu točno propisane (krivocrtna trapezna razdioba) s parametrima a, b i d
$\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$	kovarijancija dviju slučajnih varijabla X_i, X_j
c	n_{dig}-desetična cjelobrojna znamenka
c_i	i-ti koeficijent osjetljivosti dobiven kao parcijalna derivacija funkcije modela f za mjerenje po i-toj ulaznoj veličini X_i određenoj na vektorskoj procjeni $\boldsymbol{x}$ vektorske ulazne veličine $\boldsymbol{X}$
d	poluširina odsječaka u kojima je poznato da leže donja i gornja granica A i B pravokutne razdiobe s granicama koje nisu točno propisane
d_{high}	apsolutna vrijednost razlike između desnih krajnjih vrijednosti intervala pokrivanja koji je dan okvirom nesigurnosti GUM-a i metodom monte karlo
d_{low}	apsolutna vrijednost razlike između lijevih krajnjih vrijednosti intervala pokrivanja koji je dan okvirom nesigurnosti GUM-a i metodom monte karlo
e	baza prirodnog logaritima
$E(X)$	očekivanje slučajne veličine X
$E(\boldsymbol{X})$	vektorsko očekivanje vektorske slučajne veličine $\boldsymbol{X}$
$E(X^r)$	r-ti moment slučajne veličine X
$\mathrm{Ex}(\lambda)$	eksponencijalna razdioba s parametrom λ
f	matematički model mjerenja izražen kao funkcionalni odnos između izlazne veličine Y i ulaznih veličina $X_1, \ldots, X_N$ o kojima Y ovisi
$\boldsymbol{G}$	diskretni prikaz funkcija razdiobe $G_Y(\eta)$ izlazne veličine Y iz postupka monte karlo
$\mathrm{G}(\alpha, \beta)$	gama-razdioba s parametrima α i β
$g_X(\xi)$	funkcija gustoće vjerojatnosti varijable ξ ulazne veličine X
$g_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{\xi})$	zajednička (višedimenzijska) funkcija gustoće vjerojatnosti vektorske varijable $\boldsymbol{\xi}$ vektorske ulazne veličine $\boldsymbol{X}$

$g_{X_i}(\xi_i)$	funkcija gustoće vjerojatnosti varijable ξ_i ulazne veličine X_i
$G_Y(\eta)$	funkcija razdiobe varijable η izlazne veličine Y
$\tilde{G}_Y(\eta)$	neprekidna aproksimacija funkcije razdiobe $G_Y(\eta)$ izlazne veličine Y
$g_Y(\eta)$	funkcija gustoće vjerojatnosti varijable η izlazne veličine Y
$\tilde{g}_Y(\eta)$	derivacija funkcije $\tilde{G}_Y(\eta)$ po varijabli η, koja daje brojčanu aproksimaciju funkcije gustoće vjerojatnosti $g_Y(\eta)$ izlazne veličine Y
J	najmanji cijeli broj veći od ili jednak $100/(1 - p)$
k_p	faktor pokrivanja koji odgovara vjerojatnosti pokrivanja p
ℓ	cijeli broj u prikazu $c \times 10^{\ell}$ brojčane vrijednosti, gdje je c desetični broj s n_{dig}-znamenaka
M	broj pokusa monte karlo
N	broj ulaznih veličina $X_1, ..., X_N$
$\mathrm{N}(0, 1)$	standardna Gaussova razdioba
$\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$	Gaussova razdioba s očekivanjem μ i varijancijom σ^2
$\mathrm{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{V})$	višedimenzijska Gaussova razdioba s očekivanjem $\boldsymbol{\mu}$ i varijancijom $\boldsymbol{V}$
n	broj pokazivanja u nizu
n_{dig}	broj desetičnih znamenaka koje se smatraju važnim u brojčanoj vrijednosti
$\mathrm{Pr}(z)$	vjerojatnost događaja z
p	vjerojatnost pokrivanja
q	cjelobrojni dio broja $pM + 1/2$
q	broj predmeta koji se broje u uzorku specificirane veličine
$\boldsymbol{R}$	gornja trokutna matrica
$\mathrm{R}(0, 1)$	standardna pravokutna razdioba na odsječku $[0, 1]$
$\mathrm{R}(a, b)$	pravokutna razdioba na odsječku $[a, b]$
$r(x_i, x_j)$	koeficijent korelacije pridružen procjenama x_i i x_j ulaznih veličina X_i i X_j
s	standardno odstupanje niza od n pokazivanja $x_1, \ldots, x_n$
s_{p}	zbirno standardno odstupanje dobiveno iz nekoliko nizova pokazivanja
$\top$	gornji indeks koji označuje transpoziciju matrice
s_z	standardno odstupanje pridruženo prosjeku z vrijednosti $z^{(1)}, \ldots, z^{(h)}$ u adaptivnom postupku monte karlo, kad z može označivati procjenu y izlazne veličine Y, standardnu nesigurnost $u(y)$ pridruženu procjeni y ili lijevu krajnju točku y_{low} ili desnu krajnju točku y_{high} intervala pokrivanja veličine Y
$\mathrm{T}(a, b)$	trokutna razdioba na odsječku $[a, b]$
$\mathrm{Trap}(a, b, \beta)$	trapezna razdioba na odsječku $[a, b]$ s parametrom β
t_ν	usredištena t-razdioba s ν stupnjeva slobode
$t_\nu(\mu, \sigma^2)$	normalizirana i neusredištena t-razdioba s parametrima μ, i σ^2 s ν stupnjeva slobode

U(0, 1)	standardna arkussinus razdioba (U-razdioba) na odsječku [0, 1]
U(a, b)	arkussinus razdioba (U-razdioba) na odsječku [a, b]
U_p	povećana nesigurnost koja odgovara vjerojatnosti pokrivanja p
$\boldsymbol{U_x}$	matrica nesigurnosti pridružena vektorskoj procjeni $\boldsymbol{x}$ vektorske ulazne veličine $\boldsymbol{X}$
$u(\boldsymbol{x})$	vektor $(u(x_1), \ldots, u(x_N))^\top$ standardnih nesigurnosti pridružen vektorskoj procjeni $\boldsymbol{x}$ vektorske ulazne veličine $\boldsymbol{X}$
$u(x_i)$	standardna nesigurnost pridružena procjeni x_i ulazne veličine X_i
$u(x_i, x_j)$	kovarijancije pridružene procjenama x_i i x_j ulaznih veličina X_i i X_j.
$u(y)$	standardna nesigurnost pridružena procjeni y izlazne veličine Y
$u(\tilde{y})$	standardna nesigurnost pridružena procjeni $\tilde{y}$
$u_\mathrm{c}(y)$	sastavljena standardna nesigurnost pridružena procjeni y izlazne veličine Y
$u_i(y)$	i-ta sastavnica standardne nesigurnosti $u(y)$ pridružena procjeni y izlazne veličine Y
$\boldsymbol{V}$	kovarijancijska (varijancijsko-kovarijancijska) matrica
$V(X)$	varijancija slučajne varijable X
$V(\boldsymbol{X})$	kovarijancijska matrica slučajne vektorske varijable $\boldsymbol{X}$
w	poluširina $(b - a)/2$ odsječka [a, b]
X	ulazna veličina koja se smatra slučajnom varijablom
$\boldsymbol{X}$	vektor $(X_1, \ldots, X_N)^\top$ ulaznih veličina koje se smatraju slučajnim varijablama o kojima veličina Y ovisi
X_i	i-ta ulazna veličina koja se smatra slučajnom varijablom kojima veličina Y ovisi
x	procjena (očekivanje) veličine X
$\boldsymbol{x}$	vektorska procjena (vektorsko očekivanje) $(x_1, \ldots, x_N)^\top$ veličine $\boldsymbol{X}$
$\bar{x}$	prosječno vrijednost niza od n pokazivanja $x_1, \ldots, x_n$
x_i	prosječna (očekivanje) veličine X_i
x_i	i-to pokazivanje u nizu
$x_{i,r}$	r-to monte karlo izvlačenje iz funkcije gustoće vjerojatnosti varijable X_i
$\boldsymbol{x}_r$	r-to monte karlo izvlačenje koje sadržava vrijednosti $x_{1,r}, \ldots, x_{N,,r}$ izvučene iz funkcija gustoće vjerojatnosti za N ulaznih veličina $X_1, \ldots, X_N$ ili iz zajedničke funkcije gustoće vjerojatnosti varijable $\boldsymbol{X}$
Y	skalarna izlazna veličina koja se smatra slučajnom varijablom
y	procjena (očekivanje) izlazne veličine Y
$\tilde{y}$	procjena Y, dobivena kao prosječna vrijednost M vrijednosti modela y_r iz postupka monte karlo ili kao očekivanje veličine Y koje opisuje gustoća vjerojatnosti $\tilde{g}_Y(\eta)$
y_high	desna krajnja točka intervala pokrivanja izlazne veličine Y
y_low	lijeva krajnja točka intervala pokrivanja izlazne veličine Y

y_r	r-ta vrijednost modela $f(\boldsymbol{x}_r)$
$y_{(r)}$	r-ta vrijednost modela nakon sortiranja vrijednosti y_r rastućim redom
$z^{(h)}$	h-ta vrijednost u adaptivnom postupku monte karlo, kad z može označivati procjenu y izlazne veličine Y, standardnu nesigurnost $u(y)$ pridruženu procjeni y ili lijevu krajnju točku y_{low} ili desnu krajnju točku y_{high} intervala pokrivanja za veličinu Y
α	vrijednost vjerojatnosti
α	parametar gama-razdiobe
β	parametar trapezne razdiobe jednak omjeru poluširine gornje i donje stranice trapeza
β	parametar gama-razdiobe
$\Gamma(z)$	gama-funkcija varijable z
δ	brojčana dopuštena odstupanja pridružena brojčanoj vrijednosti
$\delta(z)$	Diracova delta-funkcija s varijablom z
η	varijabla koja opisuje moguće vrijednosti izlazne veličine Y
λ_1	gornja poluširina trapeza za trapeznu razdiobu
λ_2	osnovna poluširina trapeza za trapeznu razdiobu
μ	očekivanje veličina koju opisuje razdioba vjerojatnosti
ν	broj stupnjeva slobode t-razdiobe ili χ^2-razdiobe
ν_{eff}	stvarni broj stupnjeva slobode pridružen standardnoj nesigurnosti $u(y)$
ν_{p}	broj stupnjeva slobode pridružen zbirnom standardnom odstupanju s_p dobivenom iz više nizova pokazivanja
ξ	varijabla koja opisuje moguće vrijednosti slučajne veličine X
$\boldsymbol{\xi}$	vektorska varijabla $(\xi_1, \ldots, \xi_N)^\top$ koja opisuje moguće vrijednosti vektorske ulazne veličine $\boldsymbol{X}$
ξ_i	varijabla koja opisuje moguće vrijednosti slučajne veličine X_i
σ	standardno odstupanje veličine opisane razdiobom vjerojatnosti
σ^2	varijancija (kvadrirano standardno odstupanje) veličine opisane razdiobom vjerojatnosti
ϕ	faza veličine koja se mijenja po zakonu sinusa
χ_ν^2	χ-kvadrat razdioba s ν stupnjeva slobode

Bibliografija

[1] BEATTY, R. W. Insertion loss concepts. *Proc. IEEE* ***52*** (1964), 663–671.

[2] BERTHOUEX, P. M., and BROWN, L. C. *Statistics for Environmental Engineers.* CRC Press, USA, 1994.

[3] BOX, G. E. P., and MULLER, M. A note on the generation of random normal variates. *Ann. Math. Statist.* ***29*** (1958), 610–611.

[4] CHAN, A., GOLUB, G., and LEVEQUE, R. Algorithms for computing the sample variance: analysis and recommendations. *Amer. Stat.* ***37*** (1983), 242–247.

[5] CONTE, S. D., and DE BOOR, C. *Elementary Numerical Analysis: An Algorithmic Approach.* McGraw-Hill, 1972.

[6] COX, M. G. The numerical evaluation of B-splines. *J. Inst. Math. Appl.* ***10*** (1972), 134–149.

[7] COX, M. G., and HARRIS, P. M. Software specifications for uncertainty evaluation. Tech. Rep. DEM-ES-010, National Physical Laboratory, Teddington, UK, 2006.

[8] COX, M. G., and HARRIS, P. M. SSfM Best Practice Guide No. 6, Uncertainty evaluation. Tech. Rep. DEM-ES-011, National Physical Laboratory, Teddington, UK, 2006.

[9] COX, M. G., and SIEBERT, B. R. L. The use of a Monte Carlo method for evaluating uncertainty and expanded uncertainty. *Metrologia* ***43*** (2006), S178-S188.

[10] DAVID, H. A. *Order Statistics.* Wiley, New York, 1981.

[11] DEKKER, T. J. Finding a zero by means of successive linear interpolation. In *Constructive Aspects of the Fundamental Theorem of Algebra* (London, 1969), B. Dejon and P. Henrici, Eds., Wiley Interscience.

[12] DEVROYE, L. *Non-Uniform Random Number Generation.* Springer, New York, 1986.

[13] DIETRICH, C. F. *Uncertainty, Calibration and Probability.* Adam Hilger, Bristol, UK, 1991.

[14] DOWSON, D. C, and WRAGG, A. Maximum entropy distributions having prescribed first and second order moments. *IEEE Trans. IT* ***19*** (1973), 689–693.

[15] EA. Expression of the uncertainty of measurement in calibration. Tech. Rep. EA-4/02, European Co-operation for Accreditation, 1999.

[16] ELSTER, C. Calculation of uncertainty in the presence of prior knowledge. *Metrologia* ***44*** (2007), 111–116.

[17] EURACHEM/CITAC. Quantifying uncertainty in analytical measurement. Tech. Rep. Guide CG4, EURACHEM/CITEC, 2000. Second edition.

[18] EVANS, M., HASTINGS, N., and PEACOCK, B. *Statistical distributions.* Wiley, 2000.

[19] FRENKEL, R. B. Statistical background to the ISO 'Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement'. Tech. Rep. Monograph 2, NML Technology Transfer Series, Publication number TIP P1242, National Measurement Laboratory, CSIRO, Australia, 2002.

[20] GELMAN, A., CARLIN, J. B., STERN, H. S., and RUBIN, D. B. *Bayesian Data Analysis.* Chapman and Hall, London, 2004.

[21] GLESER, L. J. Assessing uncertainty in measurement. *Stat. Sci.* ***13*** (1998), 277–290.

[22] HALL, B. D., and WILLINK, R. Does »Welch-Satterthwaite« make a good uncertainty estimate? *Metrologia* ***38*** (2001), 9–15.

[23] HIGHAM, N. J. *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms.* SIAM, Philadelphia, 1996.

[24] ISO. ISO 3534-1. Statistics — Vocabulary and symbols — Part1: Probability and general statistical terms. International Standards Organization, Geneva.

[25] JAYNES, E. T. Information theory and statistical mechanics. *Phys. Rev* ***106*** (1957), 620–630.

[26] JAYNES, E. T. Where do we stand on maximum entropy? In *Papers on Probability, Statistics, and Statistical Physics* (Dordrecht, The Netherlands, 1989), R. D. Rosenkrantz, Ed., Kluwer Academic, pp. 210–314. http://bayes.wustl.edu/ etj/articles/stand.on.entropy.pdf.

[27] KACKER, R., and JONES, A. On use of Bayesian statistics to make the Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement consistent. *Metrologia* ***40*** (2003), 235–248.

[28] KERNS, D. M., and BEATTY, R. W. *Basic Theory of Waveguide Junctions and Introductory Microwave Network Analysis.* Pergamon Press, London, 1967.

[29] KINDERMAN, A., MONAHAN, J., and RAMAGE, J. Computer methods for sampling from Student's t-distribution. *Math. Comput* ***31*** (1977), 1009–1018.

[30] L'ECUYER, P., and SIMARD, R. TestU01: A software library in ANSI C for empirical testing of random number generators. http://www. iro.umontreal. ca/~simardr/testu01/tu01.html.

[31] LEYDOLD, J. Automatic sampling with the ratio-of-uniforms method. *ACM Trans. Math. Software* ***26*** (2000), 78–98.

[32] LIRA, I. *Evaluating the Uncertainty of Measurement. Fundamentals and Practical Guidance.* Institute of Physics, Bristol, UK, 2002.

[33] LIRA, I. H., and WOGER, W. Bayesian evaluation of the standard uncertainty and coverage probability in a simple measurement model. *Meas. Sci. Technol.* ***12*** (2001), 1172–1179.

[34] MATSUMOTO, M., and NISHIMURA, T. Mersenne Twister: A 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-random number generator. *ACM Trans. Modeling and Computer Simulation 8* (1998), 3–30.

[35] MCCULLOUGH, B. D., and WILSON, B. On the accuracy of statistical procedures in Microsoft Excel 2003. *Computational Statistics and Data Analysis* (2004).

[36] MOLER, C. B. *Numerical computing with MATLAB.* SIAM, Philadelphia, 2004.

[37] NETLIB. The Netlib repository of freely available software, documents, and databases of interest to the numerical, scientific computing, and other communities contains facilities for sampling from probability distributions, http://www.netlib.org.

[38] NIST. The NIST Digital Library of Mathematical Functions contains facilities for sampling from probability distributions, http://dlmf.nist.gov.

[39] OIML. Conventional value of the result of weighing in air. Tech. Rep. OIML D 28, Organisation Internationale de Métrologie Légale, Paris, 2004.

[40] PAPOULIS, A. On an extension of Price's theorem. *IEEE Trans. Inform. Theory IT-11* (1965).

[41] PRICE, R. A useful theorem for nonlinear devices having Gaussian inputs. *IEEE Trans. Inform. Theory IT-4* (1958), 69–72.

[42] RICE, J. R. *Mathematical Statistics and Data Analysis,* second ed. Duxbury Press, Belmont, Ca., USA, 1995.

[43] RIDLER, N. M., and SALTER, M. J. Propagating S-parameter uncertainties to other measurement quantities. In *58th ARFTG (Automatic RF Techniques Group) Conference Digest* (2001).

[44] ROBERT, C. P., and CASELLA, G. *Monte Carlo Statistical Methods.* Springer-Verlag, New York, 1999.

[45] SALTER, M. J., RIDLER, N. M., and COX, M. G. Distribution of correlation coefficient for samples taken from a bivariate normal distribution. Tech. Rep. CETM 22, National Physical Laboratory, Teddington, UK, 2000.

[46] Schoenberg, I. J. Cardinal interpolation and spline functions. *J. Approx. Theory* ***2*** (1969), 167–206.

[47] Scowen, R. S. QUICKERSORT, Algorithm 271. *Comm. ACM* ***8*** (1965), 669.

[48] Shannon, C. E. A mathematical theory of information. *Bell Systems Tech. J.* ***27*** (1948), 623–656.

[49] Strang, G., and Borre, K. *Linear Algebra, Geodesy and GPS.* Wiley, Wellesley-Cambridge Press, 1997.

[50] Taylor, B. N., and Kuyatt, C. E. Guidelines for evaluating and expressing the uncertainty of NIST measurement results. Tech. Rep. TN1297, National Institute of Standards and Technology, USA, 1994.

[51] Weise, K., and Woger, W. A Bayesian theory of measurement uncertainty. *Meas. Sci. Technol.* ***3*** (1992), 1–11.

[52] Wichmann, B. A., and Hill, I. D. Algorithm AS183. An efficient and portable pseudo-random number generator. *Appl. Statist.* ***31*** (1982), 188–190.

[53] Wichmann, B. A., and Hill, I. D. Correction. algorithm AS183. An efficient and portable pseudo-random number generator. *Appl. Statist.* ***33*** (1984), 123.

[54] Wichmann, B. A., and Hill, I. D. Generating good pseudo-random numbers. *Computational Statistics and Data Analysis* ***51*** (2006), 1614–1622.

[55] Willink, R. Coverage intervals and statistical coverage intervals. *Metrologia* ***41*** (2004), L5–L6.

[56] Woger, W. Probability assignment to systematic deviations by the Principle of Maximum Entropy. *IEEE Trans. Instr. Measurement IM-36* (1987), 655–658.

Abecedno kazalo