JCGM 100:2008

Vrednovanje mjernih podataka – Upute za iskazivanje mjerne nesigurnosti

DRŽAVNI ZAVOD ZA
MJERITELJSTVO

Vrednovanje mjernih podataka – Upute za iskazivanje mjerne nesigurnosti

JCGM 100:2008

GUM 1995 s manjim ispravcima

Vrednovanje mjernih podataka – Upute za iskazivanje mjerne nesigurnosti

DRŽAVNI ZAVOD ZA MJERITELJSTVO

Prijevod 1. izdanja iz 2008.

NASLOV IZVORNIKA:

Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurements

Évaluation des données de mesure – Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure

NAKLADNIK: *Državni zavod za mjeriteljstvo* • ZA IZDAVAČA: *Mirko Vuković* • PREVEO S ENGLESKOG JEZIKA: *Mirko Vuković* • LEKTORIRAO: *dr. Luka Vukojević* • KORIGIRAO: *Domagoj Škarica* • PRIPREMA SLOGA: *LASERplus d.o.o, Zagreb, Mirela Mikić Muha* • *Zagreb, travnja 2009.*

ISBN: 978-953-6783-08-3

Sadržaj

Ove upute utvrđuju opća pravila za određivanje i izražavanje mjerne nesigurnosti čija je svrha da budu primjenjive na širok spektar mjerenja. Temelj je za *Upute* Preporuka 1 (CI-1981) Međunarodnog odbora za utege i mjere (Comite International des Poids et Mesures, CIPM) i Preporuka INC-1 (1980) Radne skupine za iskazivanje nesigurnosti. Radnu skupinu sazvao je Međunarodni ured za utege i mjere (BIPM) kao odgovor na zahtjev CIPM-a. Preporuka CIPM-a jedina je preporuka koja se odnosi na izražavanje mjerne nesigurnosti koju je prihvatila neka međuvladina organizacija.

Ove upute priredila je zajednička radna skupina koja se sastojala od stručnjaka koje je imenovao BIPM, Međunarodno elektrotehničko povjerenstvo (IEC), Međunarodna organizacija za normizaciju (ISO) i Međunarodna organizacija za zakonsko mjeriteljstvo (OIML).

Ovih sedam organizacija* potpomogle su izradbu ovih uputa koje su objavljene u njihovo ime:

BIPM: Međunarodni ured za utege i mjere

IEC: Međunarodno elektrotehničko povjerenstvo

IFCC: Međunarodni savez za kliničku kemiju**

ISO: Međunarodna organizacija za normizaciju

IUPAC: Međunarodni savez za čistu i primijenjenu kemiju**

IUPAP: Međunarodni savez za čistu i primijenjenu fiziku**

OIML: Međunarodna organizacija za zakonsko mjeriteljstvo

Korisnici ovih uputa pozivaju se da šalju svoja mišljenja i zahtjeve za objašnjenja bilo kojoj od tih sedam organizacija, čije su poštanske adrese na koricama***

---

* **Fusnota uz verziju iz 2008. godine:**

Godine 2005. Međunarodna suradnja na akreditaciji laboratorija (ILAC) službeno se pridružila tim sedam osnivačkim organizacijama.

** **Fusnota uz verziju iz 2008. godine:**

Nazivi tih triju organizacija promijenili su se od 1995. godine. Oni sada glase:
IFCC: Međunarodni savez za kliničku kemiju i laboratorijsku medicinu
IUPAC: Međunarodna organizacija za čistu i primijenjenu kemiju
IUPAP: Međunarodna organizacija za čistu i primijenjenu fiziku

*** **Fusnota uz verziju iz 2008. godine:**

Veze na adrese tih osam organizacija koje su trenutačno uključene u JCGM (Zajednički odbor za upute u mjeriteljstvu) dane su na http://www.bipm.org/en/committees/jc/jcgm.

Predgovor

Godine 1977., priznajući pomanjkanje međunarodnog konsenzusa o izražavanju mjerne nesigurnosti, najveći svjetski autoritet u mjeriteljstvu, Međunarodni odbor za utege i mjere (CIPM), zahtijevao je od Međunarodnog ureda za utege i mjere (BIPM) da započne rješavati to pitanje zajedno s nacionalnim laboratorijima koji čuvaju etalone te da izradi preporuku.

BIPM je priredio podroban upitnik koji je obuhvaćao uključena pitanja i poslao ga u 32 nacionalna mjeriteljska laboratorija za koja je bilo poznato da imaju interes za taj predmet (i, za obavijest, u pet međunarodnih organizacija). Do početka 1979. godine primljeni su odgovori od 21 laboratorija [1]. Gotovo su svi vjerovali da je važno doći do međunarodno prihvaćena postupka za izražavanje mjerne nesigurnosti i za sastavljanje pojedinačnih sastavnica nesigurnosti u jednu ukupnu nesigurnost. Nije međutim bio očit konsenzus o metodi koju treba upotrebljavati. BIPM je tada sazvao sastanak sa svrhom postizanja ujednačena i općenito prihvatljiva postupka za specifikaciju nesigurnosti; njemu su prisustvovali stručnjaci iz 11 nacionalnih etalonskih laboratorija. Ta je radna skupina o iskazivanju nesigurnosti izradila Preporuku INC-1 (1980), Izražavanje eksperimetalnih nesigurnosti [2]. CIPM je tu preporuku odobrio 1981. godine i ponovno je potvrdio 1986. godine [4].

Zadaću razvoja podrobnih uputa koje se temelje na preporuci radne skupine (koja je prije kratka skica, nego podrobno pravilo) CIPM je povjerio Međunarodnoj organizaciji za normizaciju (ISO), budući da je ISO mogao bolje odraziti potrebe koje potječu iz širih interesa industrije i trgovine.

Odgovornost je dodijeljena tehničkoj savjetodavnoj skupini za mjeriteljstvo 4 ISO-a (TAG 4) jer je jedan od njezinih zadataka bilo usklađivanje razvoja uputa o pitanjima mjerenja koja su zajednički interes ISO-a i šest organizacija koje sudjeluju s ISO-om u radu skupine TAG 4: Međunarodnog elektrotehničkog povjerenstva (IEC), partnera ISO-a u međunarodnoj normizaciji, CIPM-a i Međunarodne organizacije za zakonsko mjeriteljstvo (OIML-a), dviju svjetskih mjeriteljskih organizacija; Međunarodne unije za čistu i primijenjenu kemiju (IUPAC-a), Međunarodne unije za čistu i primijenjenu fiziku (IUPAP-a), dviju međunarodnih unija koje predstavljaju kemiju i fiziku i Međunarodnog saveza za kliničku kemiju (IFCC-a).

TAG 4 osnovao je pak Radnu skupinu 3 (ISO/TAG 4/WG 3) koja je bila sastavljena od stručnjaka koje su imenovali BIPM, IEC, ISO i OIML, a imenovao ju je predsjednik radne skupine TAG 4. Njoj su zadani sljedeći uvjeti:

> razvoj dokumentarnih uputa koje se temelje na preporuci radne skupine BIPM-a o iskazivanju mjernih nesigurnosti koja osigurava pravila za iskazivanje mjerne nesigurnosti za uporabu u normizaciji, umjeravanju, akreditaciji laboratorija i mjeriteljstvu;
>
> Svrha je takvih uputa:
>
> – promicanje potpunog obavješćivanja o tome kako se postižu iskazivanja nesigurnosti
>
> – osiguranje temelja za međunarodne usporedbe mjernih rezultata.

---

1) Vidi *Bibliografiju*

* **Fusnota uz verziju iz 2008. godine:**

U izradbi ove verzije GUM-a iz 2008. godine JCGM/WG 1 unio je samo nužne ispravke u verziju tiskanu 1995. godine. Ti se ispravci pojavljuju u podtočkama 4.2.2, 4.2.4, 5.1.2, B.2.17, C.3.3, C.3.4, E.4.3, H.4.3, H.5.2.5 i H.6.2.

0 Uvod

0.1 Kad se iskazuje rezultat mjerenja koje fizičke veličine, obvezatno se daje neki količinski pokazatelj kakvoće tog rezultata, tako da oni koji ga upotrebljavaju mogu procijeniti njegovu pouzdanost. Bez takva se pokazatelja mjerni rezultati ne mogu uspoređivati ni međusobno ni s referentnim vrijednostima danim u specifikaciji ili u normi. Kako bi se lakše primjenjivali, razumjeli i uopće prihvaćali postupci za opis kakvoće mjernog rezultata, nužno je prema tomu da se izračunava i izražava njegova *nesigurnost*.

0.2 Pojam *nesigurnosti* kao količinskog atributa razmjerno je nov u povijesti mjerenja, premda su *pogrješke* i *analiza pogrješaka* već dugo dio prakse znanosti o mjerenju ili mjeriteljstva. Danas je široko prihvaćeno da kad se izračunaju sve poznate ili sumnjive sastavnice pogrješke i primijene svi primjereni ispravci, još uvijek ostane nesigurnost oko ispravnosti navedenog rezultata, tj. sumnja koliko dobro mjerni rezultat prikazuje vrijednost veličine koja se mjeri.

0.3 Baš kao što je sveopća uporaba međunarodnog sustava jedinica (SI) unijela suvislost u sva znanstvena i tehnička mjerenja, tako i svjetski dogovor o izračunavanju i izražavanju mjerne nesigurnosti dopušta da se lako razumije i ispravno tumači značenje širokoga spektra mjernih rezultata u znanosti, tehnici, trgovini, industriji i propisima. U doba svjetskoga tržišta prijeko je potrebno da u cijelom svijetu bude ujednačena metoda za izračun i izražavanje mjerne nesigurnosti kako bi se mjerenja provedena u različitim zemljama mogla lako uspoređivati.

0.4 Najbolja metoda za izračun i izražavanje nesigurnosti mjernog rezultata trebala bi biti:

– *sveobuhvatna*: trebala bi biti primjenjiva na sve vrste mjerenja i sve vrste ulaznih podataka koji se upotrebljavaju pri mjerenju.

Stvarna veličina koja se upotrebljava za izražavanje nesigurnosti trebala bi biti:

– *unutarnje povezana*: izravno izvodiva iz sastavnica koje joj doprinose i neovisna o tome kako su te sastavnice razvrstane u skupine i o raščlanjivanju tih sastavnica u podsastavnice;

– *prenosiva:* trebalo bi biti moguće izravno upotrijebiti nesigurnost izračunanu za jedan rezultat kao sastavnicu u izračunu nesigurnosti drugog mjerenja u kojem se upotrebljava taj prvi rezultat.

Nadalje, u mnogim industrijskim i trgovačkim primjenama kao i u području zdravstva i sigurnosti često je nužno dati kakav interval oko mjernog rezultata za koji se može očekivati da obuhvaća velik udio razdiobe vrijednosti koje bi se razumno mogle pripisati veličini podvrgnutoj mjerenju. Prema tomu, najbolja bi metoda za izračun i izražavanje mjerne nesigurnosti trebala omogućiti lako dobivanje takvog intervala, posebno intervala s vjerojatnošću pokrivanja ili razinom povjerenja koja doista odgovara zahtijevanom intervalu.

0.5 Pristup na kojem se temelje ove upute u općim je crtama izložen u preporuci INC-1 (1980) [2] radne skupine za iskazivanje nesigurnosti koju je BIPM sazvao kao odgovor na zahtjev CIMP-a (vidi predgovor). Taj pristup, o čijoj se opravdanosti raspravlja u dodatku E, zadovoljava sve prije izložene zahtjeve. To nije slučaj za većinu drugih metoda koje su sada u uporabi. Preporuku INC-1 (1980) odobrio je i ponovno potvrdio CIPM u svojoj preporuci 1 (CI-1981) [3] i preporuci 1 (CI-1986) [4]; hrvatski prijevodi tih preporuka CIPM-a dani su u dodatku A (vidi redom podtočke A.2 i A.3). Budući da je preporuka INC-1 (1980) temelj na kojem počiva ovaj dokument, u točki 0.7 donosi se hrvatski prijevod, a službeni francuski tekst dan je u podtočki A.1.

0.6 Jezgrovit sažetak postupka za izračun i izražavanje mjerne nesigurnosti opisanog u ovim uputama dan je u točki 8., a u dodatku H potanko je prikazano više primjera. Ostali dodatci obrađuju: opće pojmove u mjeriteljstvu (dodatak B); osnovne statističke nazive i pojmove (dodatak C); "istinitu" vrijednost, pogrješku i nesigurnost (dodatak D); praktične savjete za izračun sastavnica nesigurnosti (dodatak F); stupnjeve slobode i razinu povjerenja (dodatak G); glavne matematičke znakove koji se upotrebljavaju u ovom dokumentu (dodatak J) i bibliografske uputnice (dodatak K). Dokument završava abecednim kazalom.

0.7 Preporuka INC-1 (1980), Izražavanje eksperimentalnih nesigurnosti

1. Nesigurnost mjernog rezultata sastoji se općenito od nekoliko sastavnica koje se prema načinu na koji se procjenjuje njihova brojčana vrijednost mogu razvrstati u dva razreda:

   A sastavnice koje se izračunavaju statističkim metodama

   B sastavnice koje se izračunavaju na drugi način.

   Ne postoji uvijek jednostavno podudaranje između razvrstavanja u razred A ili B i prije upotrebljavana razvrstavanja u "slučajne" i "sustavne" sastavnice nesigurnosti. Naziv "sustavna nesigurnost" može navoditi na pogrješno mišljenje i trebalo bi ga izbjegavati.

   Svaki iscrpan izvještaj o nesigurnosti trebao bi sadržavati potpun popis tih sastavnica, navodeći za svaku sastavnicu metodu upotrijebljenu za dobivanje njezine brojčane vrijednosti.

2. Sastavnice razreda A opisuju se procijenjenim varijancijama s_i^2 (ili procijenjenim "standardnim odstupanjima" s_i) i brojem stupnjeva slobode ν_i. Gdje je to prikladno, trebalo bi dati i kovarijancije.

3. Sastavnice razreda B trebale bi se opisivati veličinama u_j^2, koje se mogu smatrati približnim vrijednostima odgovarajućih varijancija, čije se postojanje pretpostavlja. Veličine u_j^2 mogu se obrađivati kao varijancije, a veličine u_j kao standardna odstupanja. Gdje je to prikladno, kovarijancije bi se trebale obrađivati na isti način.

4. Sastavljena nesigurnost trebala bi se opisivati brojčanom vrijednošću dobivenom primjenom uobičajene metode sastavljanja varijancija. Sastavljena nesigurnost i njezine sastavnice trebale bi se izražavati u obliku "standardnih odstupanja".

5. Ako je za posebne primjene potrebno sastavljenu nesigurnost množiti kojim faktorom da bi se dobila ukupna nesigurnost, upotrijebljeni množidbeni faktor uvijek se mora navesti.

Vrednovanje mjernih podataka – Upute za iskazivanje mjerne nesigurnosti

1 Opseg primjene

1.1 Ove *upute* utvrđuju opća pravila za određivanje i izražavanje nesigurnosti mjerenja koje se može provoditi na različitim razinama točnosti i u mnogim područjima – od radioničkog poda do temeljnog istraživanja. Prema tomu, načela ovih *uputa* namijenjena su da budu primjenjiva na širok spektar mjerenja, uključujući i mjerenja koja se zahtijevaju za:

– održavanje upravljanja kakvoćom i osiguravanje kakvoće u proizvodnji;

– zadovoljavanje zakona i propisa i njihovo provođenje;

– vođenje temeljnih i primijenjenih istraživanja te razvoja u znanosti i tehnici;

– umjeravanje etalona i instrumenata te provođenje ispitivanja u državnom mjernom sustavu kako bi se postigla sljedivost prema državnim etalonima;

– razvoj, održavanje i uspoređivanje međunarodnih i državnih fizičkih referentnih etalona uključujući i referentne tvari.

1.2 Ove se *upute* u prvome redu bave izražavanjem mjerne nesigurnosti dobro definiranih fizičkih veličina (mjerenih veličina) koje se mogu u biti opisati jedinstvenom vrijednošću. Ako se pojava koja nas zanima može prikazati samo kao kakva razdioba vrijednosti ili ako ona ovisi o jednom ili više parametara (kao što je vrijeme) mjerene veličine koje se zahtijevaju za njezin opis tada su skup veličina koje opisuju tu razdiobu ili tu ovisnost.

1.3 Ove su *upute* također primjenjive za određivanje i izražavanje nesigurnosti pridružene misaonom oblikovanju i teoretskoj analizi pokusa, mjernim metodama i složenim sastavnicama i sustavima. Budući da mjerni rezultat i njegova nesigurnost mogu biti pojmovni i u cijelosti se temeljiti na hipotetičkim podatcima, naziv "mjerni rezultat" kako se upotrebljava u ovim *uputama* mora se tumačiti u tome širem sklopu.

1.4 Ove *upute* daju zapravo opća pravila za određivanje i izražavanje mjerne nesigurnosti, a ne iscrpne upute prilagođene određenoj grani tehnike. Nadalje, u njima se ne raspravlja o tome kako se jednom izračunana nesigurnost pojedinačnog rezultata može upotrijebiti u različite svrhe, primjerice za izvođenje zaključaka o sukladnosti tog rezultata s drugim sličnim rezultatima da bi se utvrdile granice tolerancije u proizvodnom procesu ili donijela odluka može li se određeni smjer djelovanja poduzeti na siguran način. Prema tomu, može biti potrebno razvijati posebne norme koje se temelje na ovim *uputama*, a koje obrađuju probleme svojstvene posebnim mjernim područjima ili različitim uporabama količinskih izraza nesigurnosti*. Te norme mogu biti pojednostavnjeni prikazi ovih uputa, ali bi one morale uključivati podroban opis koji je primjeren za tu radnju točnosti i složenosti određenih mjerenja i određenih primjena.

NAPOMENA: Ima mnogo situacija u kojima se, kako se vjeruje, pojam mjerne nesigurnosti ne može u potpunosti primijeniti, kao što je određivanje preciznosti ispitnih metoda (vidi npr. [5]).

---

* **Fusnota uz verziju iz 2008. godine:**

Od objave ovih uputa iz ovog je dokumenta izvedeno nekoliko dokumenata za posebne primjene. Za obavijest zbirka tih dokumenata čiji popis nije potpun može se naći na mrežnoj stranici http://www.bipm.org/en/committees/jc/jcgm/wg1 bibliography.html.

2 Definicije

2.1 Opći mjeriteljski nazivi

Definicije niza naziva općih mjeriteljskih pojmova bitnih za ove *upute*, kao što su "mjerljiva veličina", "mjerena veličina" i "mjerna pogrješka", dane su u dodatku B. Te su definicije preuzete iz *Međunarodnog rječnika osnovnih i općih pojmova u metrologiji* (skraćeno VIM)* [6]. Osim toga, dodatak C daje definicije niza osnovnih statističkih naziva koje su uglavnom preuzete iz međunarodne norme ISO 3534-1 [7]. Kad je jedan od tih mjeriteljskih ili statističkih (ili njima srodnih) naziva, počevši od točke 3. prvi put upotrijebljen u tekstu, tiskan je masno, a broj točke u kojoj je definiran dan je u zagradama.

Zbog važnosti za ove *upute*, definicija općeg mjeriteljskog pojma "mjerna nesigurnost" dana je i u dodatku B i u podtočki 2.2.3. Definicije najvažnijih pojmova bitnih za ove *upute* daju se u podtočkama od 2.3.1 do 2.3.6. U svim tim točkama i dodatcima B i C uporaba zagrada oko nekih naziva znači da se te riječi mogu ispustiti ako je vjerojatno da to neće izazvati zabunu.

2.2 Naziv "nesigurnost"

O pojmu nesigurnosti raspravljat će se nadalje u točki 3. i dodatku D.

2.2.1 Riječ "nesigurnost" znači sumnju i, prema tomu, u najširem smislu "mjerna nesigurnost" znači sumnju u valjanost mjernog rezultata. Zbog pomanjkanja različitih riječi za taj *opći pojam* nesigurnosti i za posebne veličine koje daju *količinske mjere* toga pojma, npr. standardno odstupanje, potrebno je riječ "nesigurnost" upotrebljavati u ta dva različita smisla.

2.2.2 U ovim *uputama* riječ "nesigurnost" bez pridjeva odnosi se i na opći pojam nesigurnosti i na neku ili na sve količinske mjere tog pojma. Kad se želi iskazati koja posebna mjera nesigurnosti, upotrebljavaju se prikladni pridjevi.

2.2.3 Formalno je definicija naziva "mjerna nesigurnost" razvijena za uporabu u ovim *uputama* i u VIM-u [6] (VIM:1993, definicija 3.9) ovo:

(mjerna) nesigurnost
parametar pridružen rezultatu mjerenja koji opisuje rasipanje vrijednosti koje bi se razumno moglo pripisati mjerenoj veličini.

NAPOMENE:

1. Taj parametar može biti npr. standardno odstupanje (ili njegova višestrukost) ili polušírina intervala s navedenom razinom povjerenja.

2. Mjerna nesigurnost sastoji se općenito od više sastavnica. Neke od tih sastavnica mogu se odrediti na temelju statističke razdiobe niza mjerenja i opisati eksperimentalnim standardnim odstupanjima. Druge sastavnice, koje se također mogu opisati standardnim odstupanjima, određuju se iz pretpostavljenih razdioba vjerojatnosti na temelju iskustva ili drugih podataka.

3. Podrazumijeva se da je mjerni rezultat najbolja procjena vrijednosti mjerene veličine i da sve sastavnice nesigurnosti (uključujući i one koje potječu od sustavnih djelovanja, kao što su sastavnice pridružene ispravcima i referentnim etalonima) doprinose rasipanju.

2.2.4 Definicija mjerne nesigurnosti dana u podtočki 2.2.3 radna je definicija koja je usmjerena na mjerni rezultat i njegovu izračunanu nesigurnost. Međutim, ona nije nespojiva s drugim pojmovima mjerne nesigurnosti kao što su:

---

* **Fusnota uz verziju iz 2008. godine:**

Treće izdanje toga rječnika objavljeno je 2008. godine pod naslovom JCGM 200:2008, *Međunarodni mjeriteljski rječnik – Osnovni i opći pojmovi i pridruženi nazivi (VIM)*

– mjera moguće pogrješke u procijenjenoj vrijednosti mjerene veličine dobivene mjernim rezultatom

– procjena koja opisuje područje vrijednosti u kojem leži istinita vrijednost mjerene veličine (VIM:1984, definicija 3.09).

Premda su ta dva uobičajena pojma valjani kao uzori, oni ipak stavljaju u žarište *neutvrdive* veličine: redom, "pogrješku" mjernog rezultata i "istinitu vrijednost" mjerene veličine (nasuprot njezinoj procijenjenoj vrijednosti). Međutim, koji god *pojam* nesigurnosti bio prihvaćen, sastavnica nesigurnosti uvijek se *brojčano određuje* uporabom istih podataka (vidi također podtočku E.5).

2.3 Nazivi specifični za ove *upute*

Općenito se pojmovi koji su specifični za ove *upute* određuju u tekstu kad se prvi put uvode. Međutim, radi lakšeg upućivanja na njih na ovom su mjestu dane definicije najvažnijih od tih naziva.

NAPOMENA: Daljnja rasprava o tim nazivima može se naći na ovaj način: za naziv 2.3.2, vidi podtočke 3.3.3, 4.2; za naziv 2.3.3., vidi podtočke 3.3.3 i 4.3., za naziv 2.3.4 vidi točku 5 i jednadžbe (10) i (13); a za nazive 2.3.5 i 2.3.6 vidi točku 6.

2.3.1
standardna nesigurnost
nesigurnost mjernog rezultata izražena kao standardno odstupanje

2.3.2
određivanje (nesigurnosti) A-vrste
metoda određivanja nesigurnosti statističkom analizom niza opažanja

2.3.3
određivanje (nesigurnosti) B-vrste
metoda određivanja nesigurnosti na način koji je različit od statističke analize niza opažanja

2.3.4
sastavljena standardna nesigurnost
standardna nesigurnost kojeg mjernog rezultata kad se taj rezultat dobiva iz vrijednosti više drugih veličina jednaka pozitivnom drugom korijenu zbroja članova koji čine varijancije i kovarijancije tih drugih veličina pomnožene težinskim faktorima koji odražavaju odnos promjene mjernog rezultata prema promjeni tih veličina

2.3.5
povećana nesigurnost
veličina koja određuje interval oko mjernog rezultata za koji se može očekivati da obuhvaća velik dio razdiobe vrijednosti koje bi se razumno mogle pripisati mjernoj veličini

NAPOMENE:

1. Taj dio može se smatrati vjerojatnošću pokrivanja ili razinom povjerenja za taj interval.

2. Da bi se intervalu određenom povećanom nesigurnošću pridružila specifična razina povjerenja, potrebno je izravno ili neizravno pretpostaviti razdiobu vjerojatnosti koju pokazuju mjerni rezultati i njegova sastavljena standardna nesigurnost. Razina povjerenja koja se može pridružiti tom intervalu može se znati samo do one mjere do koje se takva pretpostavka može provjeriti.

3. U stavku 5. preporuke INC-1 (1980) povećana se nesigurnost naziva *sveukupnom nesigurnošću.*

2.3.6
faktor pokrivanja
brojčani faktor koji se upotrebljava kao množitelj sastavljene standardne nesigurnosti da bi se dobila povećana nesigurnost.

NAPOMENA: Faktor pokrivanja k obično ima vrijednost između 2 i 3.

3 Osnovni pojmovi

Dodatna rasprava o osnovnim pojmovima može se naći u dodatku D koji je usmjeren na pojmove kao što su "istinita" vrijednost, pogrješka i nesigurnost, a sadrži i grafičke prikaze tih pojmova, i u dodatku E u kojem se istražuju razlozi i statistički temelji za preporuku INC-1 (1980) na kojoj počivaju ove *upute*. Dodatak J abecedni je popis matematičkih znakova koji se upotrebljavaju u ovim putama.

3.1 Mjerenje

3.1.1 Svrha je **mjerenja** (B.2.5) određivanje **vrijednosti** (B.2.2) **mjerene veličine** (B.2.9), tj. vrijednosti **posebne veličine** (B.2.1, napomena 1.) koju treba mjeriti. Mjerenje, prema tomu, počinje s odgovarajućim točnim opisom mjerene veličine, **mjerne metode** (B.2.7) i **mjernog postupka** (B.2.8).

NAPOMENA: Naziv "istinita vrijednost" (vidi dodatak D) ne upotrebljava se u ovim uputama iz razloga navedenih u podtočki D.3.5; nazivi "vrijednost mjerene veličine" (ili veličine) i "istinita vrijednost mjerene veličine" (ili veličine) smatraju se istoznačnima.

3.1.2 Općenito, **mjerni rezultat** (B.2.11) samo je aproksimacija ili **procjena** (C.2.26) vrijednosti mjerene veličine, pa je prema tomu potpun samo kad je praćen iskazom **nesigurnosti** (B.2.18) te procjene.

3.1.3 U praksi se zahtijevana specifikacija ili definicija mjerene veličine propisuje zahtijevanom **mjernom točnošću** (B.2.14). Mjerena veličina trebala bi se u odnosu na zahtijevanu točnost odrediti s dostatnom potpunošću, tako da njezina vrijednost za sve praktične svrhe u svezi s mjerenjem bude jedinstvena. U tom se smislu izraz "vrijednost mjerene veličine" upotrebljava u ovim *uputama*.

PRIMJER: Ako treba mikrometarskom točnošću odrediti duljinu čeličnoga štapa nazivne duljine jedan metar, njezin opis (specifikacija) trebao bi uključivati temperaturu i tlak pri kojima je ona određena. Prema tomu, mjerena bi se veličina trebala opisati kao npr. duljina štapa kod 25,00 °C* i 101 325 Pa (uz dodatak svih drugih definicijskih parametara koji se smatraju nužnima, kao što je način na koji je oslonjen štap). Međutim, kad bi se ta duljina trebala odrediti samo milimetarskom točnošću, njezin opis ne bi zahtijevao određivanje temperature ili tlaka ili vrijednosti kojega drugog definicijskog parametra.

NAPOMENA: Nepotpuna definicija mjerene veličine može izazvati tako veliku sastavnicu nesigurnosti da se ona mora uključiti u određivanje nesigurnosti mjernog rezultata (vidi podtočke D.1.1., D.3.4. i D. 6.2).

3.1.4 U mnogim slučajevima mjerni se rezultat određuje na temelju niza opažanja dobivenih u **uvjetima ponovljivosti** (B.2.15, napomena 1.).

3.1.5 Smatra se da promjene u opetovanim opažanjima nastaju zbog **utjecajnih veličina** (B.2.10) koje mogu djelovati na mjerni rezultat, a ne održavaju se u potpunosti stalnim.

3.1.6 Matematički model mjerenja kojim se skup opetovanih opažanja pretvara u mjerni rezultat od odlučne je važnosti jer osim tih opažanja on općenito uključuje i različite utjecajne veličine koje nisu točno poznate. Taj nedostatak znanja doprinosi nesigurnosti mjernog rezultata, kao i promjene u opetovanim opažanjima te svaka nesigurnost pridružena samom matematičkom modelu.

3.1.7 Ove *upute* obrađuju mjerenu veličinu kao skalarnu vrijednost (pojedine veličine). Proširenje na skup srodnih mjerenih veličina koje se određuju istodobno istim mjerenjem zahtijeva zamjenu skalarne mjerene veličine i njezine **varijancije** (C.2.11, C.2.20, C.3.2) vektorskom mjerenom veličinom i **kovarijancijskom matricom** (C.3.5). Takva se zamjena razmatra u ovim *uputama* samo u primjerima (vidi podtočke H.2, H.3 i H.4).

*** Fusnota uz verziju iz 2008. godine:**

U skladu s 10. odlukom 22. CGPM-a " … desetični znak mora biti točka ili zarez na liniji …". JCGM je odlučio da u svojim dokumentima na engleskom jeziku prihvati točku na liniji. Međutim, u ovome dokumentu zadržan je desetični zarez zbog sukladnosti s verzijom tiskanom 1995. godine.

3.2 Pogrješke, djelovanja i ispravci

3.2.1 Općenito, u svakom mjerenju postoje nesavršenosti koje dovode do **pogrješke** (B.2.19) u mjernom rezultatu. Pogrješka se uobičajeno smatra sastavljenom od dviju sastavnica, **slučajne** (B.2.21) i **sustavne** (B.2.22) sastavnice.

NAPOMENA: Pogrješka je idealiziran pojam, pa se pogrješke ne mogu točno znati.

3.2.2 Za slučajnu pogrješku pretpostavlja se da nastaje iz nepredvidivih ili slučajnih vremenskih ili prostornih promjena utjecajnih veličina. Djelovanja takvih promjena, koja se u daljnjemu tekstu nazivaju *slučajnim djelovanjima*, dovode do promjena u opetovanim opažanjima mjerene veličine. Premda slučajnu pogrješku mjernog rezultata nije moguće poništiti, ona se obično može smanjiti povećanjem broja opažanja; njezino je **očekivanje** ili **očekivana vrijednost** (C.2.9, C.3.1) jednaka ništici.

NAPOMENE:

1. Eksperimentalno standardno odstupanje aritmetičke sredine ili prosječne vrijednosti kojeg niza opažanja (vidi podtočku 4.2.3) *nije* slučajna pogrješka srednje vrijednosti, premda se tako označuje u nekim publikacijama. Ono je zamjena za mjeru *nesigurnosti* srednje vrijednosti zbog slučajnih djelovanja. Točna srednja vrijednost pogrješke koja nastaje zbog tih djelovanja ne može se odrediti.

2. U ovim *uputama* velika pozornost posvećuje se razlikovanju naziva "pogrješka" i "nesigurnost". Ti nazivi nisu istoznačnice nego predstavljaju potpuno različite pojmove; ti se pojmovi ne smiju međusobno brkati ni pogrješno upotrebljavati.

3.2.3 Sustavna pogrješka, kao ni slučajna pogrješka, ne može se poništiti, ali se također često može smanjiti. Ako sustavna pogrješka potječe od utvrđenog djelovanja utjecajne veličine na mjerni rezultat (u daljnjem tekstu *sustavno djelovanje*), to se djelovanje može količinski iskazati i, ako je u odnosu na zahtijevanu mjernu točnost značajno (po veličini), može se, da bi se poništilo, primijeniti **ispravak** (B.2.23) ili **faktor ispravka** (B.2.24). Pretpostavlja se da je nakon ispravka očekivanje ili očekivana vrijednost pogrješke koja nastaje od sustavnog djelovanja jednaka ništici.

NAPOMENA: Nesigurnost ispravka, primijenjena na mjerni rezultat da bi se poništilo sustavno djelovanje *nije*, kako se ona katkad naziva, sustavna pogrješka (koja se često naziva pristranost) u mjernom rezultatu zbog toga djelovanja. Ona je zamjena za mjeru *nesigurnosti* rezultata zbog nepotpunog poznavanja zahtijevane vrijednosti ispravka. Pogrješka koja potječe od nesavršenog poništenja sustavnog djelovanja ne može se točno znati. Nazivi "pogrješka" i "nesigurnost" trebali bi se ispravno upotrebljavati te bi trebalo paziti na njihovu razliku.

3.2.4 Pretpostavlja se da je mjerni rezultat ispravljen za sva utvrđena sustavna djelovanja te da je sve poduzeto da se utvrde takva djelovanja.

PRIMJER: Ispravak zbog konačne vrijednosti impedancije voltometra koji se upotrebljava za određivanje napona (mjerena veličina) na visokoomskom otporniku primjenjuje se da bi se smanjilo sustavno djelovanje na mjerni rezultat koje potječe od djelovanja opterećenja voltometra. Međutim vrijednosti impedancija voltometra i otpornika, koje se upotrebljavaju za procjenu vrijednosti ispravka, a koje se dobivaju iz drugih mjerenja, i same su nesigurne. Te se nesigurnosti upotrebljavaju za brojčano određivanje sastavnica nesigurnosti napona koje potječu od ispravaka i, prema tomu, od sustavnih djelovanja zbog konačne impedancije voltometra.

NAPOMENE:

1. Da bi se poništila sustavna djelovanja često se mjerni instrumenti i sustavi namještaju ili umjeravaju uporabom mjernih etalona i referentnih tvari; međutim, nesigurnosti pridružene tim etalonima i tvarima moraju se još uvijek uzimati u obzir.

2. U napomeni iz podtočke 6.3.1 i u podtočki F.2.4.5 raspravlja se o slučaju za koji se ne primjenjuje ispravak za poznato značajno sustavno djelovanje.

3.3 Nesigurnost

3.3.1 Nesigurnost mjernog rezultata odražava pomanjkanje točnog znanja vrijednosti mjerene veličine (vidi podtočku 2.2). Mjerni je rezultat i nakon ispravka utvrđenih sustavnih djelovanja zbog nesigurnosti koja potječe od slučajnih djelovanja i zbog nesavršenosti ispravka rezultata zbog sustavnih djelovanja još uvijek samo *procjena* vrijednosti mjerene veličine.

NAPOMENA: Mjerni rezultat (nakon ispravka) može biti neodredivo blizu mjerene veličine (i prema tomu imati zanemarivu pogrješku) premda može imati veliku nesigurnost. Dakle, nesigurnost mjernog rezultata ne smije se brkati s preostalom nepoznatom pogrješkom.

3.3.2 U praksi postoji mnogo mogućih izvora nesigurnosti u mjerenju, uključujući:

a) nepotpunu definiciju mjerene veličine

b) nesavršeno ostvarenje definicije mjerene veličine

c) nereprezentativno uzorkovanje, izmjereni uzorak ne mora predstavljati točno definiranu mjerenu veličinu

d) nedostatno poznavanje djelovanja uvjeta okoliša na mjerenje ili nesavršeno mjerenje uvjeta okoliša

e) osobnu pristranost u očitanju analognih instrumenata

f) konačno razlučivanje instrumenata ili prag pokretljivosti

g) netočne vrijednosti mjernih etalona i referentnih tvari

h) netočne vrijednosti stalnica i drugih parametara dobivenih iz vanjskih izvora i upotrebljavanih u algoritmu za obradbu podataka

i) aproksimacije i pretpostavke uključene u mjernu metodu i postupak

j) promjene opetovanih opažanja mjerene veličine u očigledno istovjetnim uvjetima.

Ti izvori nisu nužno neovisni, pa neki od izvora od a) do i) mogu doprinositi izvoru j). Naravno, u izračunu nesigurnosti mjernog rezultata neutvrđena sustavna djelovanja ne mogu se uzeti u obzir, ali doprinose njegovoj pogrješci.

3.3.3 Preporuka INC-1 (1980) radne skupine za iskazivanje nesigurnosti razvrstava sastavnice nesigurnosti na temelju metode njihova izračuna u dva razreda, "A" i "B" (vidi 0.7, 2.3.2 i 2.3.3). Ti se razredi primjenjuju na *nesigurnost* i ne zamjenjuju riječi "slučajna" i "sustavna". Nesigurnost ispravka zbog poznatog sustava djelovanja može se u nekim slučajevima dobiti određivanjem A-vrste, dok se u drugim slučajevima može dobiti određivanjem B-vrste, kao i nesigurnost koja opisuje slučajno djelovanje.

NAPOMENA: U nekim publikacijama sastavnice nesigurnosti razvrstavaju se na "slučajne" i "sustavne", a pridružuju se pogrješkama koje nastaju redom zbog slučajnih djelovanja i poznatih sustavnih djelovanja. Takvo razvrstavanje sastavnica nesigurnosti može biti nejasno kad se općenito primjenjuje. Npr. "slučajna" sastavnica nesigurnosti u jednom mjerenju može postati "sustavnom" sastavnicom nesigurnosti u drugom mjerenju u kojem se rezultat prvog mjerenja rabi kao ulazni podatak. Razvrstavanjem u razrede *metoda* određivanja sastavnica nesigurnosti, a ne samih *sastavnica* nesigurnosti, izbjegava se takva nejasnoća. Istodobno to unaprijed ne isključuje združivanje pojedinih sastavnica koje su određene dvjema različitim metodama u određene skupine kako bi se upotrebljavale za posebne svrhe (vidi podtočku 3.4.3).

3.3.4 Svrha je razvrstavanja na sastavnice A-vrste i B-vrste da se pokažu dva različita načina određivanja sastavnica nesigurnosti i služi samo za olakšanje rasprave; ne treba shvatiti da to razvrstavanje pokazuje da postoji ikakva razlika u naravi sastavnica koje proizlaze iz tih dviju vrsta određivanja. Obje vrste određivanja temelje se na **razdiobama vjerojatnosti** (C.2.3), a sastavnice nesigurnosti, koje proizlaze iz ovih vrsta određivanja, količinski se iskazuju varijancijama ili standardnim odstupanjima.

3.3.5 Procijenjena varijancija u^2 koja opisuje sastavnicu nesigurnosti dobivenu određivanjem A-vrste izračunava se iz niza opetovanih opažanja i to je poznata statistička procijenjena varijancija s^2 (vidi podtočku 4.2). Procijenjeno **standardno odstupanje** (C.2.12, C.2.21, C.3.3) u, pozitivni drugi korijen iz u^2, jednako je prema tomu $s = u$, a zbog pogodnosti katkad se naziva *standardnom nesigurnošću A-vrste*. Za sastavnicu nesigurnosti dobivenu određivanjem B-vrste procijenjena varijancija u^2 određuje se iz dostupnog znanja (vidi podtočku 4.3), a procijenjeno standardno odstupanje u katkad se naziva *standardnom nesigurnošću B-vrste*.

Prema tomu, standardna nesigurnost B-vrste dobiva se iz **funkcije gustoće vjerojatnosti** (C.2.5) izvedene iz opažanjem **dobivene razdiobe čestoća** (C.2.18), dok se standardna nesigurnost B-vrste dobiva iz pretpostavljene funkcije gustoće vjerojatnosti koja se temelji na stupnju uvjerenja da će se kakav događaj zbiti [često se naziva subjektivnom **vjerojatnošću** (C.2.1)]. Oba pristupa primjenjuju priznata tumačenja vjerojatnosti.

NAPOMENA: Određivanje sastavnice nesigurnosti B-vrste obično se temelji na skupu prilično pouzdanih podataka (vidi podtočku 4.3.1).

3.3.6 Standardna nesigurnost mjernog rezultata kad se on dobiva iz vrijednosti više drugih veličina naziva se *sastavljenom standardnom nesigurnošću* i označuje se u_c. To je procijenjeno standardno odstupanje pridruženo rezultatu, a jednako je pozitivnom drugom korijenu sastavljene varijancije dobivene s pomoću, kako se u ovim *uputama* naziva, *zakona prijenosa nesigurnosti* (vidi točku 5) iz svih sastavnica koje predstavljaju na bilo koji način određene varijancije i **kovarijancije** (C.3.4).

3.3.7 Da bi se zadovoljile potrebe nekih industrijskih i trgovačkih primjena kao i zahtjevi u područjima zdravstva i sigurnosti, množenjem sastavljene standardne nesigurnosti u_c *faktorom pokrivanja* k dobiva se *povećana nesigurnost* U. Svrha je povećane nesigurnosti U da se oko mjernog rezultata dobije interval za koji se može očekivati da obuhvaća velik dio razdiobe vrijednosti koje bi se razumno mogle pripisati mjerenoj veličini. Izbor faktora k, čija se vrijednost obično nalazi u području između 2 i 3, temelji se na vjerojatnosti pokrivanja ili razini povjerenja koja se zahtijeva za taj interval (vidi točku 6).

NAPOMENA: Faktor pokrivanja k treba se uvijek navoditi, tako da se standardna nesigurnost izmjerene veličine može ponovo dobiti za potrebe izračunavanja sastavljene standardne nesigurnosti drugih mjernih rezultata koji mogu ovisiti o toj veličini.

3.4 Praktična razmatranja

3.4.1 Ako se mijenjaju sve veličine o kojima ovisi mjerni rezultat, njegova se mjerna nesigurnost može odrediti statistički. Međutim, budući da je to u praksi rijetko moguće zbog ograničenog vremena i izvora, nesigurnost mjernog rezultata obično se određuje uporabom matematičkog modela mjerenja i zakona prijenosa nesigurnosti. Prema tomu, u ovim se *uputama* neizravno pretpostavlja da se mjerenje može matematički modelirati do stupnja koji nameće zahtijevana mjerna točnost.

3.4.2 Budući da matematički model može biti nepotpun, sve bi se bitne veličine trebale mijenjati do praktično mogućih krajnjih vrijednosti, tako da se određivanje nesigurnosti može što je više moguće temeljiti na opaženim podatcima. Kad god je to ostvarivo, dio nastojanja da bi se dobila pouzdana određivanja nesigurnosti trebala bi biti uporaba iskustvenih modela mjerenja i uporabe etalona za provjeru i kontrolnih grafikona koje mogu pokazati je li mjerenje pod statističkim nadzorom. Matematički bi model trebalo uvijek preraditi kad opažanjem dobiveni podatci, uključujući rezultate neovisnosti određivanja iste mjerene veličine, pokažu da je taj model nepotpun. Dobro zamišljen pokus može znatno olakšati pouzdane izračune nesigurnosti i važan je dio mjeriteljskog umijeća.

3.4.3 Da bi se utvrdilo radi li mjerni sustav ispravno, često se uspoređuje pokusima opažena promjenljivost njegovih izlaznih vrijednosti, mjerena njihovim opaženim standardnim odstupanjima, s predviđenim standardnim odstupanjem dobivenim sastavljanjem različitih sastavnica nesigurnosti koje opisuju mjerenje. U takvim bi se slučajevima trebale uzimati u obzir samo one sastavnice (bez obzira jesu li dobivene određivanjima A-vrste ili B-vrste) koje bi mogle doprinijeti pokusom opaženoj promjenljivosti tih izlaznih vrijednosti.

NAPOMENA: Takva se analiza može olakšati prikupljanjem onih sastavnica koje doprinose toj promjenljivosti i sastavnica koje se ne nalaze u te dvije odvojene i prikladno obilježene skupine.

3.4.4 U nekim slučajevima nesigurnost ispravka sustavnog djelovanja ne treba biti uključena u određivanje nesigurnosti mjernog rezultata. Premda je ta nesigurnost određena, ona se može zanemariti ako njezin doprinos sastavljenoj standardnoj nesigurnosti mjernog rezultata nije značajan. Ako vrijednost samog ispravka nije značajna u odnosu na sastavljenu standardnu nesigurnost, ona se također može zanemariti.

3.4.5 Često se događa u praksi, posebno u području zakonskog mjeriteljstva, da se uređaj ispituje usporedbom s mjernim etalonom, a da su nesigurnosti pridružene mjernom etalonu i postupku uspoređivanja zanemarive u odnosu na zahtijevanu točnost ispitivanja. Takav je primjer uporaba skupa dobro umjerenih etalona mase za ispitivanje točnosti trgovačke vage. U takvim slučajevima, jer su sastavnice nesigurnosti dostatno malene, te se mogu zanemariti, na mjerenje se može gledati kao na određivanje pogrješke uređaja koji se ispituje (vidi također podtočku F.2.4.2).

3.4.6 Procjena vrijednosti mjerene veličine dobivene mjernim rezultatom katkad se izražava radije prihvaćenom vrijednošću mjernog etalona nego odgovarajućom jedinicom Međunarodnog sustava jedinica (SI). U takvim slučajevima velikoća nesigurnosti, koja se može pripisati mjernom rezultatu, može biti znatno manja nego kad se taj rezultat izražava odgovarajućom SI jedinicom. (U stvari, mjerena je veličina ponovno definirana kao omjer vrijednosti veličine koju treba mjeriti i prihvaćene vrijednosti tog etalona).

PRIMJER: Zenerov naponski etalon visoke kakvoće umjerava se usporedbom s referentnim Jospehsonovim etalonom napona koji se temelji na dogovorenoj vrijednosti Josephsonove stalnice koju je CIPM preporučio za međunarodnu uporabu. Relativna sastavljena standardna nesigurnost $u_c(V_S)/V_S$ (vidi podtočku 5.1.6) umjerenog napona V_S Zenerova etalona jednaka je 2×10^{-8} kad se V_S iskazuje s pomoću dogovorene vrijednosti, ali je zbog dodatne nesigurnosti pridružene SI-vrijednosti Josephsonove stalnice $u_c(V_S)/V_S$ jednaka 4×10^{-7} kad se V_S iskazuje s pomoću SI jedinice napona (V).

3.4.7 Grube pogrješke u zapisivanju i analizi podataka mogu u mjerni rezultat unijeti znatne nepoznate pogrješke. Velike grube pogrješke obično se mogu utvrditi prikladnom kritičkom provjerom podataka; male grube pogrješke mogu biti prikrivene ili se čak pojavljivati kao slučajne promjene. Nije predviđeno da se mjerama nesigurnosti uzimaju u obzir takve pogrješke.

3.4.8 Premda ove *upute* daju okvir za procjenu nesigurnosti, one ne mogu nadomjestiti kritičko mišljenje, intelektualno poštenje i profesionalnu uvježbanost. Određivanje nesigurnosti nije ni rutinski ni čisto matematički zadatak, on ovisi o iscrpnom poznavanju naravi mjerene veličine i mjerenja. Kakvoća i upotrebljivost iskazane nesigurnosti mjernog rezultata prema tomu konačno ovise o razumijevanju, kritičkoj analizi i poštenju onih koji doprinose određivanju njezine vrijednosti.

4 Određivanje standardne nesigurnosti

Dodatne upute za izračun sastavnica nesigurnosti uglavnom praktične naravi mogu se naći u dodatku F.

4.1 Modeliranje mjerenja

4.1.1 U većini slučajeva mjerena veličina Y ne mjeri se izravno, nego se određuje iz N drugih veličina $X_1, X_2, \ldots, X_N$ na temelju funkcijskog odnosa f:

$$Y = f(X_1, X_2, ..., X_N) \tag{1}$$

NAPOMENE:

1. Radi pojednostavnjenja zapisa u ovim se *uputama* upotrebljava isti znak za fizičku veličinu (mjerenu veličinu) i za slučajnu varijablu (vidi podtočku 4.2.1) koja predstavlja mogući ishod opažanja te veličine. Kad se navodi da X_i ima kakvu posebnu razdiobu vjerojatnosti, taj se znak upotrebljava u zadnjem smislu; pretpostavlja se da se ta fizička veličina sama može opisati u biti jedinstvenom vrijednošću (vidi podtočke 1.2. i 3.1.3).

2. U nizu opažanja k-ta opažanjem dobivena vrijednost veličine X_i označuje se s $X_{i,k}$; prema tomu, ako R označuje otpor otpornika, k-ta se vrijednost otpora dobivena opažanjem označuje s R_k.

3. Procjena veličine X_i (točnije, procjena njezina očekivanja) označuje se s x_i.

PRIMJER: Ako se na priključke temperaturno ovisnog otpornika koji ima otpor R_0 na određenoj temperaturi t_0 i linearni temperaturni koeficijent otpora, α primijeni napon V, snaga P (mjerena veličina) koja se troši na tom otporniku na temperaturi t ovisi o V, R_0, α i t u skladu s izrazom:

$$P = f(V, R_0, \alpha, t) = V^2/\{R_0[1 + \alpha(t - t_0)]\}$$

NAPOMENA: Druge metode mjerenja snage P modelirale bi se različitim matematičkim izrazima.

4.1.2 *Ulazne veličine* $X_1, X_2, \ldots, X_N$ o kojima ovisi *izlazna veličina* Y mogu se same promatrati kao mjerene veličine i mogu same ovisiti o drugim veličinama, uključujući ispravke i faktore ispravka zbog sustavnih djelovanja, dovodeći tako do složenog funkcijskog odnosa f koji se ne mora uvijek moći eksplicitno napisati. Nadalje, funkcija f može biti određena eksperimentalno (vidi podtočku 5.1.4) ili postojati samo kao kakav algoritam koji se mora brojčano odrediti. Funkciju f kako se pojavljuje u ovim *uputama* treba tumačiti u tom širem smislu, a posebno kao funkciju koja sadržava svaku veličinu, uključujući sve ispravke i faktore ispravka, koja može kojom značajnom sastavnicom nesigurnosti doprinijeti mjernom rezultatu.

Prema tomu, ako podatci pokazuju da f ne modelira mjerenje do onog stupnja koji nameće zahtijevana točnost mjernog rezultata, da bi se uklonila neprikladnost opisa (vidi podtočku 3.4.2), u f se moraju uključiti dodatne ulazne veličine. To može zahtijevati uvođenje ulazne veličine koja bi odražavala nepotpuno poznavanje pojave koja utječe na mjerenu veličinu. Da bi se u primjeru iz podtočke 4.1.1 uzela u obzir nejednolična razdioba temperature u otporniku, mogući nelinearni koeficijent otpora ili moguća ovisnost otpora o barometarskom tlaku mogle bi biti potrebne dodatne ulazne veličine.

NAPOMENA: Ipak jednadžba (1) može imati elementaran oblik kao $Y = X_1 - X_2$. Taj izraz modelira npr. usporedbu dvaju određivanja iste veličine X.

4.1.3 Skup ulaznih veličina $X_1, X_2, ..., X_N$ može se razvrstati u razrede:

– veličina čije se vrijednosti i *nesigurnosti* izravno određuju u stvarnom mjerenju. Te se vrijednosti i nesigurnosti mogu dobiti, primjerice, iz kojeg pojedinačnog opažanja, opetovanih opažanja ili prosudbe koja se temelji na iskustvu, a može uključivati određivanje ispravaka očitavanja instrumenta i ispravaka zbog utjecajnih veličina kao što su temperatura okoliša, barometarski tlak i vlažnost;

– veličina čije se vrijednosti i *nesigurnosti* uvode u mjerenje iz vanjskih izvora kao što su veličine pridružene umjerenim mjernim etalonima, potvrđenim referentnim tvarima i referentnim podatcima dobivenim iz priručnika.

4.1.4 Procjena mjerene veličine Y, koja se označuje s y, dobiva se iz jednadžbe (1) uporabom *procjena ulaznih veličina* $x_1, x_2, ..., x_N$ za vrijednosti tih N veličina $X_1, X_2, ..., X_N$. Prema tomu, *procjena izlazne veličine* y tog mjernog rezultata daje se izrazom:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_N) \tag{2}$$

NAPOMENA: U nekim se slučajevima ta procjena y može dobiti iz izraza:

$$y = \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_{1,k}, X_{2,k}, \ldots, X_{N,k})$$

Tj. kao procjena y uzima se aritmetička sredina ili prosjek (vidi podtočku 4.2.1) n neovisnih određivanja Y_k veličine Y, od kojih svako ima istu nesigurnost i svako se temelji na potpunom skupu opaženih vrijednosti N neovisnih veličina X_i dobivenih u isto vrijeme. Tom načinu usrednjavanja može se dati prednost kad je f nelinearna funkcija ulaznih veličina $X_1, X_2, ..., X_N$ u odnosu na usrednjavanje $y = f(\overline{X}_1, \overline{X}_2, ..., \overline{X}_N)$, gdje je:

$$\overline{X}_i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_{i,k}$$

aritmetička sredina pojedinačnih opažanja $X_{i,k}$, ali ta su dva pristupa istovjetna ako je f linearna funkcija veličina X_i (vidi podtočke H.2 i H.4).

4.1.5 Procijenjeno standardno odstupanje pridruženo procjeni izlazne veličine ili mjernog rezultata y, koje se naziva *sastavljenom standardnom nesigurnošću* i označuje s $u_c(y)$, određuje se iz procijenjenog standardnog odstupanja pridružena procjeni ulazne veličine x_i, koje se naziva *standardnom nesigurnošću* i označuje s $u(x_i)$ (vidi podtočke 3.3.5 i 3.3.6).

4.1.6 Svaka procjena ulazne veličine x_i i njezina pridružena standardna nesigurnost $u(x_i)$ dobivaju se iz razdiobe mogućih vrijednosti ulazne veličine X_i. Ta razdioba vjerojatnosti može se temeljiti na frekvenciji, tj. na nizu opažanja $X_{i,k}$ veličine X_i, ili to može biti kakva *apriorna* razdioba. Određivanja A-vrste sastavnica standardne nesigurnosti temelje se na čestotnim razdiobama, dok se određivanja B-vrste temelje na *apriornim* razdiobama. Mora se shvatiti da su u oba slučaja te razdiobe modeli koji služe za prikaz stanja našeg znanja.

4.2 Određivanje standardne nesigurnosti A-vrste

4.2.1 U većini slučajeva najbolja je raspoloživa procjena očekivanja ili očekivane vrijednosti μ_q veličine q koja se mijenja na slučajan način [**slučajna varijabla** (C.2.2)], i za koju je u istim mjernim uvjetima (vidi definiciju B.2.15) dobiveno n neovisnih opažanja q_k, **aritmetička sredina** ili **prosjek** $\overline{q}$ (C.2.19) tih n opažanja:

$$\overline{q} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} q_k \tag{3}$$

Prema tomu da bi se odredio mjerni rezultat y u jednadžbi (2) za ulaznu se veličinu X_i procijenjenu iz n neovisnih opetovanih opažanja $X_{i,k}$ kao procjena x_i ulazne veličine upotrebljava aritmetička sredina $\overline{X}_i$ dobivena iz jednadžbe (3); tj. $x_i = \overline{X}_i$. Procjene onih ulaznih veličina koje se ne izračunavaju iz opetovanih opažanja, kao što su veličine koje su naznačene u drugom razredu veličina iz podtočke 4.1.3, moraju se dobiti drugim metodama.

4.2.2 Pojedinačna opažanja q_k razlikuju se po vrijednosti zbog slučajnih promjena utjecajnih veličina ili slučajnih djelovanja (vidi podtočku 3.2.2). Eksperimentalna varijancija tih opažanja, koja daju procjenu varijancije σ^2 razdiobe vjerojatnosti veličine q, dana je izrazom

$$s^2(q_k) = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(q_j - \overline{q})^2 \tag{4}$$

Ta procjena varijancije i njezin pozitivni drugi korijen $s(q_k)$, koji se naziva **eksperimentalnim standardnim odstupanjem** (B.2.17), opisuju promjenljivost opaženih vrijednosti q_k ili, točnije, njihovo rasipanje oko njihove srednje vrijednosti q.

4.2.3 Najbolja procjena varijancije srednje vrijednosti $\sigma^2(\overline{q}) = \sigma^2/n$ dana je izrazom:

$$s^2(\overline{q}) = \frac{s^2(q_k)}{n} \tag{5}$$

Eksperimentalna varijancija srednje vrijednosti $s^2(\overline{q})$ i **eksperimentalno standardno odstupanje srednje vrijednosti** $s(\overline{q})$ (B.2.17, napomena 2.), koje je jednako pozitivnom drugom korijenu iz $s^2(\overline{q})$, količinski određuju mjeru koliko dobro $\overline{q}$ procjenjuje očekivanje μ_q veličine q, a oboje se može upotrebljavati kao mjera nesigurnosti srednje vrijednosti $\overline{q}$.

Na taj je način za ulaznu veličinu X_i određenu iz n neovisnih opetovanih opažanja $X_{i,k}$ standardna nesigurnost $u(x_i)$ njezine procjene $x_i = \overline{X}_i$ uz $s^2(\overline{X}_i)$ izračunano u skladu s jednadžbom (5) jednaku $u(x_i) = s(\overline{X}_i)$. Radi pogodnosti $u^2(x_i) = s^2(\overline{X}_i)$ i $u(x_i) = s(\overline{X}_i)$ katkad se redom nazivaju *varijancijojm A-vrste i standardnom nesigurnošću A-vrste.*

NAPOMENE:

1. Broj opažanja n trebao bi biti dostatno velik kako bi se osiguralo da $\overline{q}$ daje pouzdanu procjenu očekivanja μ_q slučajne varijable q i da $s^2(\overline{q})$ daje pouzdanu procjenu varijancije $\sigma^2(\overline{q}) = \sigma^2/n$ (vidi podtočku 4.3.2, napomenu). Kad se konstruiraju intervali povjerenja (vidi podtočku 6.2.2), mora se uzeti u obzir razlika između $s^2(\overline{q})$ i $\sigma^2(\overline{q})$. U tom slučaju, ako je razdioba vjerojatnosti veličine q normalna (vidi podtočku 4.3.4), ta se razlika uzima u obzir preko t-razdiobe (vidi podtočku G.3.2).

2. Premda je varijancija $s^2(\overline{q})$ temeljnija veličina, standardno je odstupanje $s(\overline{q})$ prikladnije za promjenu jer ima istu dimenziju kao veličina q i lakše je shvatljiva vrijednost nego varijancija.

4.2.4 Za dobro opisano mjerenje pod statističkim nadzorom može biti raspoloživa sastavljena ili skupna procjena varijancije s_p^2 (ili skupno eksperimentalno standardno odstupanje s_p) koja opisuje mjerenje. U takvim slučajevima, kad se vrijednost mjerene veličine q određuje iz n neovisnih opažanja, eksperimentalna varijancija aritmetičke sredine $\overline{q}$ tih opažanja bolje se procjenjuje s pomoću izraza s_p^2/n, nego s pomoću izraza $s^2(q_k)/n$, a standardna je nesigurnost jednaka $u = s_p/\sqrt{n}$ (vidi također napomenu iz podtočke H.3.6).

4.2.5 Često se procjena x_i ulazne veličine X_i dobiva iz krivulje koja je dobivena prilagodbom eksperimentalnim podatcima metodom najmanjih kvadrata. Procijenjene varijancije i rezultirajuće standardne nesigurnosti prilagođenih parametara koji opisuju tu krivulju te svih pretkazanih točaka obično se mogu izračunati s pomoću dobro poznatih statističkih postupaka (vidi podtočku H.3 i [8]).

4.2.6 Kad se dokumentiraju određivanja vrijednosti sastavnica nesigurnosti A-vrste, trebalo bi uvijek dati broj stupnjeva slobode (C.2.3.1) υ_i nesigurnosti $u(x_i)$ (vidi podtočku G.3) jednak $n - 1$ u jednostavnom slučaju kao u podtočkama 4.2.1 i 4.2.3, gdje se $x_i = \overline{X}_i$ i $u(x_i) = s(\overline{X}_i)$ izračunavaju iz n neovisnih opažanja.

4.2.7 Ako su slučajne promjene u opažanjima koje ulazne veličine korelirane npr. u vremenu, srednja vrijednost i eksperimentalno standardno odstupanje srednje vrijednosti, kako su dani u podtočkama 4.2.1 i 4.2.3, mogu biti neprikladni **procjenjivači** (C.2.25) željenih **statistika** (C.2.23). U takvim slučajevima trebala bi se opažanja analizirati statističkim metodama posebno razrađenim za obradbu niza koreliranih mjerenja koja se mijenjaju na slučajan način.

NAPOMENA: Takve posebne metode upotrebljavaju se za obradbu mjerenja frekvencijskih etalona. Moguće je međutim, da se s kratkotrajnih mjerenja prelazi na dugotrajna mjerenja drugih mjeriteljskih veličina. Tada pretpostavka o nekoreliranim slučajnim promjenama ne mora više vrijediti, a mogle bi se također rabiti posebne metode za obradbu tih mjerenja. (Za iscrpnu raspravu o Allanovoj varijanciji vidi npr. [9]).

4.2.8 Rasprava o određivanju standardne nesigurnosti A-vrste u podtočkama od 4.2.1 do 4.2.7 ovim se ne iscrpljuje. Postoje mnoge situacije, neke i prilično složene, koje se mogu obrađivati statističkim metodama. Važan je primjer uporaba planova umjeravanja, koji se često temelje na metodi najmanjih kvadrata, za određivanje mjernih nesigurnosti koje nastaju zbog kratkotrajnih i dugotrajnih slučajnih promjena rezultata usporedaba tvarnih izrađevina nepoznatih vrijednosti, kao što su granične mjerke i etaloni mase, s referentnim etalonima poznatih vrijednosti. U takvim razmjerno jednostavnim mjernim situacijama sastavnice nesigurnosti često se mogu izračunavati statističkom analizom podataka dobivenih iz planova koji se sastoje od ulančanih nizova mjerenja mjerene veličine za više različitih vrijednosti veličina o kojima ona ovisi, tzv. analizom varijancije (vidi podtočku H.5).

NAPOMENA: Na nižim razinama lanca umjeravanja, gdje se često pretpostavlja da su referentni etaloni točno poznati jer su umjereni u državnim ili primarnim laboratorijima, nesigurnost rezultata umjeravanja može biti kakva pojedinačna standardna nesigurnost A-vrste određena iz skupnoga eksperimentalnog standardnog odstupanja koje opisuje to mjerenje.

4.3 Određivanje standardne nesigurnosti B-vrste

4.3.1 Za procjenu x_i ulazne veličine X_i koja nije dobivena iz opetovanih opažanja pridružena procjena varijancije $u^2(x_i)$ ili standardna nesigurnost $u(x_i)$ izračunava se znanstvenom prosudbom koja se temelji na svim raspoloživim podatcima o mogućoj promjenljivosti X_i. Takav skup podataka može uključivati:

– prijašnje mjerne podatke

– iskustvo s tvarima i instrumentima ili opće poznavanje ponašanja i svojstava bitnih tvari i instrumenata

– proizvođačke specifikacije

– podatke dane u potvrdama o umjeravanju i drugim potvrdama

– nesigurnosti dodijeljene referentnim podatcima uzetim iz priručnika.

Radi pogodnosti na ovaj način određene $u^2(x_i)$ i $u(x_i)$ katkad se nazivaju redom *varijancijom B-vrste i standardnom nesigurnošću B-vrste.*

NAPOMENA: Kad se procjena x_i dobiva iz *apriorne* razdiobe, pridružena varijancija piše se na odgovarajući način kao $u^2(X_i)$, ali zbog jednostavnosti u ovim se *uputama* upotrebljavaju oznake $u^2(x_i)$ i $u(x_i)$.

4.3.2 Ispravna uporaba skupa raspoloživih podataka za određivanje standardne nesigurnosti B-vrste zahtijeva sposobnost opažanja koja se temelji na iskustvu i općem znanju, a to je vježba koja se praksom može naučiti. Trebalo bi priznati da određivanje standardne nesigurnosti B-vrste može biti isto tako pouzdano kao i određivanje A-vrste, posebno u mjernim situacijama gdje se određivanje A-vrste temelji na razmjerno malom broju statistički neovisnih opažanja.

NAPOMENA: Ako je razdioba veličine q iz napomene 1. u podtočki 4.2.3 normalna, tada je $\sigma[s(\overline{q})]/\sigma(q)$, standardno odstupanje eksperimentalnoga standardnog odstupanja $s(\overline{q})$ u odnosu na $\sigma(\overline{q})$ približno jednako $[2(n-1)]^{-1/2}$. Prema tomu, uzimajući $\sigma[s(\overline{q})]$ kao nesigurnost standardnog odstupanja $s(\overline{q})$, za $n = 10$ opažanja relativna će nesigurnost eksperimentalnoga standardnog odstupanja $s(\overline{q})$ biti 24 posto, dok će za $n = 50$ opažanja ona biti 10 posto. (Dodatne vrijednosti dane su u tablici E.1 u dodatku E).

4.3.3 Ako se procjena x_i uzima iz proizvođačeve specifikacije, potvrde o umjeravanju, priručnika ili drugog izvora, a njezina se iskazana nesigurnost navodi kao poseban višekratnik standardnog odstupanja, standardna nesigurnost $u(x_i)$ jednostavno je jednaka navedenoj vrijednosti podijeljenoj tim množiteljem, a procijenjena je varijancija $u^2(x_i)$ jednaka drugomu korijenu tog količnika.

PRIMJER: U potvrdi o umjeravanju navodi se da je masa etalona mase m_S izrađenog od nehrđajućeg čelika nazivne vrijednosti jedan kilogram jednaka 1 000,000 325 g i da je "nesigurnost te vrijednosti, na razini od tri standardna odstupanja", jednaka 240 µg. Standardna nesigurnost etalona mase tada je jednostavno jednaka $u(m_S) = (240\ \mu g)/3 = 80\ \mu g$. To odgovara relativnoj standardnoj nesigurnosti $u(m_S)/m_S$ od 80×10^{-9} (vidi podtočku 5.1.6). Procijenjena varijancija jednaka je $u^2(m_S) = (80\ \mu g)^2 = 6{,}4 \times 10^{-9}\ g^2$.

NAPOMENA: U mnogim slučajevima daje se malo ili ništa podataka o pojedinačnim sastavnicama nesigurnosti iz kojih se dobiva navedena nesigurnost. Za izražavanje nesigurnosti u skladu s praksom ovih *uputa* to općenito nije važno, jer se kod izračunavanja sastavljene nesigurnosti mjernog rezultata (vidi točku 5) sve nesigurnosti obrađuju na isti način.

4.3.4 Navedena nesigurnost procjene x_i ne daje se nužno kao u podtočki 4.3.3 kao višekratnik standardnog odstupanja. Umjesto toga može se tvrditi da navedena nesigurnost određuje interval koji ima razinu povjerenja (vidi podtočku 6.2.2) od 90, 95 ili 99 posto. Ako nije drukčije naznačeno, može se pretpostaviti da je za izračunavanje navedene nesigurnosti upotrijebljena **normalna razdioba** (C.2.14) te da se dijeljenjem navedene nesigurnosti odgovarajućim faktorom za normalnu razdiobu može natrag dobiti standardna nesigurnost procjene x_i. Faktori koji odgovaraju trima gornjim razinama povjerenja jesu: 1,64; 1,96 i 2,58 (vidi također tablicu G.1 u dodatku G).

NAPOMENA: Za takvom pretpostavkom ne bi bilo potrebe kad bi se nesigurnost davala u skladu s preporukama ovih *uputa* koje se tiču iskazivanja nesigurnosti kojima se ističe da se uvijek mora dati upotrijebljeni faktor pokrivanja (vidi podtočku 7.2.3).

PRIMJER: U potvrdi o umjeravanju navodi se da je otpor etalonskog otpornika R_S nazivne vrijednosti deset oma kod 23 °C jednak $10{,}000\,742\ \Omega \pm 129\ \mu\Omega$ i da "navedena vrijednost od 192 µΩ određuje interval koji ima razinu povjerenja od 99 posto". Za standardnu nesigurnost otpornika može se uzeti $u(R_S) = (129\ \mu\Omega)/2{,}58 = 50\ \mu\Omega$, što odgovara relativnoj standardnoj nesigurnosti $u(R_S)/R_S$ od $5{,}0 \times 10^{-6}$ (vidi podtočku 5.1.6). Procijenjena varijancija jednaka je $u^2(R_S) = (50\ \mu\Omega)^2 = 2{,}5 \times 10^{-9}\ \Omega^2$.

4.3.5 Razmotrimo slučaj u kojem se na temelju dostupnih podataka može tvrditi da "postoji vjerojatnost pedeset prema pedeset da vrijednost ulazne veličine X_i leži u intervalu od a_- do a_+" (drugim riječima, vjerojatnost da X_i leži unutar tog intervala jednaka je 0,5 ili 50 posto). Kad se može pretpostaviti da je razdioba mogućih vrijednosti veličina X_i približno normalna, tada se kao najbolja procjena x_i veličine X_i može uzeti središte tog intervala. Nadalje, ako se s $a = (a_+ - a_-)/2$ označi poluširina tog intervala, može se uzeti da je $u(x_i) = 1{,}48a$, budući da za normalnu razdiobu s očekivanjem μ i standardnim odstupanjem σ interval $\mu \pm \sigma/1{,}48$ obuhvaća 50 posto te razdiobe.

PRIMJER: Strojar koji određuje dimenzije kojeg dijela procjenjuje da njegova duljina s vjerojatnošću 0,5 leži u intervalu od 10,07 mm do 10,15 mm i iskazuje da je $l = (10{,}11 \pm 0{,}04)$ mm, što znači da raspon vrijednosti $\pm 0{,}04$ određuje interval koji ima razinu povjerenja od 50 posto. Tada je $a = 0{,}04$ mm, a ako se za moguće vrijednosti duljine l pretpostavi normalna razdioba, standardno će odstupanje duljine biti jednako $u(l) = 1{,}48 \times 0{,}04\ \text{mm} \approx 0{,}06$ mm, a procijenjena varijancija bit će jednaka $u^2(l) = (1{,}48 \times 0{,}04\ \text{mm})^2 = 3{,}5 \times 10^{-3}\ \text{mm}^2$.

4.3.6 Razmotrimo slučaj sličan onomu u podtočki 4.3.5, s tim da se na temelju dostupnih podataka može utvrditi da "postoji vjerojatnost dva prema tri da vrijednost veličine X_i leži u intervalu od a_- do a_+" (drugim riječima, vjerojatnost da X_i leži unutar tog intervala jednaka je približno 0,67). Tada se razumno može uzeti da je $u(x_i) = a$, jer za normalnu razdiobu s očekivanjem μ i standardnim odstupanjem σ interval $\mu \pm \sigma$ obuhvaća oko 68,3 posto te razdiobe.

NAPOMENA: Kad bi se upotrijebila stvarna normalna devijata 0,967 42 koja odgovara vjerojatnosti $p = 2/3$, tj. kad bi se napisalo $u(x_i) = a/0{,}967\ 42 = 1{,}033a$, dalo bi se vrijednosti $u(x_i)$ znatno veće značenje nego što se time očito upozorava.

4.3.7 U drugim slučajevima može biti moguće procijeniti samo granice (gornju i donju) veličine X_i, naposе može biti moguće tvrditi da je "vjerojatnost da vrijednost veličine X_i leži u intervalu od a_- do a_+ za sve praktične svrhe jednaka jedinici, a vjerojatnost da X_i leži izvan tog intervala u biti jednaka ništici". Kad o mogućim vrijednostima veličine X_i u tom intervalu *ne postoji nikakvo posebno znanje*, može se samo pretpostavljati da je jednako vjerojatno da X_i leži bilo gdje unutar tog intervala (jednolična ili pravokutna razdioba mogućih vrijednosti, vidi podtočku 4.4.5 i sl. 2a). Tada je x_i, očekivanje ili očekivana vrijednost veličine X_i, jednako središtu tog intervala $x_i = (a_- + a_+)/2$, s pridruženom varijancijom:

$$u^2(x_i) = (a_+ - a_-)^2/12 \tag{6}$$

Ako se razlika $(a_+ - a_-)$ granica intervala označi s $2a$, tada jednadžba (6) postaje:

$$u^2(x_i) = a^2/3 \tag{7}$$

NAPOMENA: Kad na taj način određena sastavnica nesigurnosti bitno doprinosi nesigurnosti mjernog rezultata, razborito je za njezin daljnji izračun dobiti dodatne podatke.

PRIMJERI:

1. U priručniku se daje vrijednost koeficijenta pravocrtnog toplinskog širenja čistoga bakra kod 20 °C, $\alpha_{20}(\mathrm{Cu})$ kao $16{,}52 \times 10^{-6}\ °\mathrm{C}^{-1}$ i jednostavno navodi da "pogrješka te vrijednosti ne bi trebala premašiti $0{,}40 \times 10^{-6}\ °\mathrm{C}^{-1}$". Na temelju tih ograničenih podataka razumno je pretpostaviti da vrijednost $\alpha_{20}(\mathrm{Cu})$ s jednakom vjerojatnošću leži u intervalu od $16{,}12 \times 10^{-6}\ °\mathrm{C}^{-1}$ do $16{,}92 \times 10^{-6}\ °\mathrm{C}^{-1}$ te da je mala vjerojatnost da $\alpha_{20}(\mathrm{Cu})$ leži izvan tog intervala. Tada je na temelju jednadžbe (7) varijancija te simetrične pravokutne razdiobe mogućih vrijednosti $\alpha_{20}(\mathrm{Cu})$ s poluširinom $a = 0{,}40 \times 10^{-6}\ °\mathrm{C}^{-1}$ jednaka $u^2(\alpha_{20}) = (0{,}40 \times 10^{-6}\ °\mathrm{C}^{-1})^2/3 = 53{,}3 \times 10^{-15}\ °\mathrm{C}^{-2}$, a standardna nesigurnost jednaka $u(\alpha_{20}) = (0{,}40 \times 10^{-6}\ °\mathrm{C}^{-1})/\sqrt{3} = 0{,}23 \times 10^{-6}\ °\mathrm{C}^{-1}$.

2. U specifikaciji proizvođača digitalnog voltometra navodi se da je "između jedne i dvije godine nakon umjeravanja instrumenta njegova točnost u mjernom području od 1 V jednaka 14×10^{-6} puta očitanje više 2×10^{-6} puta to područje". Uzmimo da se instrument upotrebljava 20 mjeseci nakon umjeravanja za mjerenje u svojemu naponskom području V od 1 V i da je utvrđeno da je aritmetička sredina više neovisnih opetovanih opažanja veličine V jednaka $\overline{V} = 0{,}928\ 571$ V sa standardnom nesigurnošću A-vrste jednakom $u(\overline{V}) = 12\ \mu$V. Standardna nesigurnost pridružena specifikacijama proizvođača može se dobiti određivanjem B-vrste, uz pretpostavku da navedena točnost osigurava simetrične granice pribrojivom ispravku $\Delta\overline{V}$ veličine $\overline{V}$ čije je očekivanje jednako ništici te da ona s istom vjerojatnošću leži bilo gdje u tim granicama. Tada je poluširina a simetrične pravokutne razdiobe mogućih vrijednosti veličine $\Delta\overline{V}$ jednaka $a = (14 \times 10^{-6}) \times (0{,}928\ 571\ \mathrm{V}) + (2 \times 10^{-6}) \times (1\ \mathrm{V}) = 15\ \mu\mathrm{V}$, a iz jednadžbe (7) za varijanciju se dobije vrijednost $u^2(\Delta\overline{V}) = 75\ \mu\mathrm{V}^2$, a za standardnu nesigurnost vrijednosti $u(\Delta\overline{V}) = 8{,}7\ \mu$V. Procjena vrijednosti mjerene veličine V dana je vrijednošću $V = \overline{V} + \Delta\overline{V} = 0{,}928\ 571$ V. Sastavljena standardna nesigurnost te procjene može se dobiti sastavljanjem standardne nesigurnosti A-vrste veličine $\overline{V}$ jednake 12 μV i standardne nesigurnosti B-vrste veličine $\Delta\overline{V}$ jednake 8,7 μV. Opća metoda sastavljanja nesigurnosti dana je u točki 5 s ovim posebnim primjerom obrađenim u podtočki 5.1.5.

4.3.8 U podtočki 4.3.7 gornja i donja granica a_+ i a_- ulazne veličine X_i mogu u odnosu na najbolju procjenu x_i biti nesimetrične; točnije, ako se donja granica napiše kao $a_- = x_i - b_-$, a gornja granica kao $a_+ = x_i + b_+$, tada je $b_- \neq b_+$. Budući da u ovom slučaju x_i (pretpostavljeno očekivanje veličine X_i) nije u središtu intervala a_- do a_+, razdioba vjerojatnosti veličine X_i ne može biti jednolična u cijelom tom intervalu. Međutim, za izbor odgovarajuće razdiobe ne mora postojati dostatno dostupnih podataka; različiti će modeli voditi na različite izraze za varijanciju. U nedostatku takvih podataka najjednostavnija je aproksimacija:

$$u^2(x_i) = \frac{(b_+ + b_-)^2}{12} = \frac{(a_+ - a_-)^2}{12} \tag{8}$$

što je varijancija pravokutne razdiobe s punom širinom $b_+ + b_-$. (O nesimetričnim razdiobama također se raspravlja u podtočkama F.2.4.4 i G.5.3).

PRIMJER: Ako se u primjeru 1. iz podtočke 4.3.7 u priručniku daje vrijednost koeficijenta α_{20}(Cu) = 16,52 × 10^{-6} °C^{-1} te se navodi da je "najmanja moguća vrijednost jednaka 16,40 × 10^{-6} °C^{-1}, a najveća moguća vrijednost jednaka 16,92 × 10^{-6} °C^{-1}", tada je b_- = 0,12 × 10^{-6} °C^{-1}, b_+ = 0,40 × 10^{-6} °C^{-1}, a iz jednadžbe (8) $u(\alpha_{20})$ = 0,15 × 10^{-6} °C^{-1}.

NAPOMENE:

1. U mnogim praktičnim situacijama gdje su takve granice nesimetrične, može biti prikladno primijeniti ispravak procjene x_i velikoće $(b_+ - b_-)/2$ tako da nova procjena x_i' veličine X_i bude jednaka srednjoj vrijednosti tih granica: $x_i' = (a_+ + a_-)/2$. Time se ta situacija svodi na slučaj iz podtočke 4.3.7, uz nove vrijednosti $b_+' = b_-' = (b_+ + b_-)/2 = (a_+ + a_-)/2 = a$.

2. Na temelju načela najveće vrijednosti entropije, funkcija gustoće vjerojatnosti u takvom nesimetričnom slučaju može se prikazati izravno $p(X_i) = A\exp[-\lambda(X_i - x_i)]$, s $A = [b_- \exp(\lambda b_-) + b_+ \exp(-\lambda b_+)]^{-1}$, a $\lambda = \{\exp[\lambda(b_- + b_+)] - 1\}/\{b_- \exp[\lambda(b_- + b_+)] + b_+\}$. To, za $b_+ > b_-$, $\lambda > 0$ i za $b_+ < b_-$, $\lambda < 0$, dovodi do varijancije $u^2(x_i) = b_+ b_- - (b_+ - b_-)/\lambda$.

4.3.9 Budući da u podtočki 4.3.7 nije bilo posebnog znanja o mogućim vrijednostima veličine X_i unutar njezinih procijenjenih granica od a_- do a_+, moglo se samo pretpostaviti da je jednako vjerojatno za X_i da poprimi bilo koju vrijednost unutar tih granica, a da je vjerojatnost da bude izvan njih jednaka ništici. Takve skokovite neprekidnosti u razdiobi vjerojatnosti često nisu prirodne. U mnogim slučajevima stvarnije je očekivati da vrijednosti u blizini granica intervala budu manje vjerojatne od vrijednosti u blizini središta tog intervala. Tada je često razumno zamijeniti simetričnu pravokutnu razdiobu trapeznom razdiobom s istim bočnim stranicama (istokračan trapez), širinom osnovice jednakom $(a_+ - a_-) = 2a$ i širinom gornje stranice jednakom $2a\beta$, gdje je $0 \leq \beta \leq 1$. Kad $\beta \rightarrow 1$ ta trapezna razdioba teži pravokutnoj razdiobi iz podtočke 4.3.7, dok je za $\beta = 0$ jednaka trokutnoj razdiobi (vidi podtočku 4.4.6 i sliku 2.b). Uz pretpostavku takve trapezne razdiobe za X_i očekivanje veličine X_i jednako je x_i = $(a_- + a_+)/2$, a njemu pridružena varijancija jednaka je:

$$u^2(x_i) = a^2(1 + \beta^2)/6 \tag{9a}$$

koja za trokutnu razdiobu ($\beta = 0$) postaje jednaka:

$$u^2(x_i) = a^2/6 \tag{9b}$$

NAPOMENE:

1. Za normalnu razdiobu s očekivanjem μ i standardnim odstupanjem σ interval $\mu \pm 3\sigma$ obuhvaća približno 99,73 posto te razdiobe. Prema tomu, ako se može pretpostaviti da gornja i donja granica a_+ i a_- određuje 99,73 postotne granice prije nego 100 postotne, i ako se za X_i može pretpostaviti da je približno normalno raspodijeljena prije nego da (kao u podtočki 4.3.7) o veličini X_i između tih granica nema posebnog znanja, tada je $u^2(x_i) = a^2/9$. Za usporedbu, varijancija simetrične pravokutne razdiobe poluširine a jednaka je $a^2/3$ [jednadžba (7)], a varijancija simetrične trokutne razdiobe s poluširinom a jednaka je $a^2/6$ [jednadžba (9b)]. Velikoće varijancija tih triju razdioba iznenađujuće su slične s obzirom na velike razlike u količini potrebnih podataka za njihovu provjeru.

2. Trapezna razdioba jednaka je konvoluciji dviju pravokutnih razdioba [10], jedne s poluširinom a_1 jednakom srednjoj vrijednosti poluširine trapeza, $a_1 = a(1 + \beta)/2$ i druge s poluširinom a_2 jednakom srednjoj vrijednosti širine jednog od trokutastih dijelova trapeza, $a_2 = a(1 + \beta)/2$. Varijancija te razdiobe jednaka je $u^2 = u_1^2/3 + u_2^2/3$. Konvolucijom dobivena razdioba može se shvaćati kao pravokutna razdioba čija širina $2a_1$ sama ima nesigurnost prikazanu pravokutnom razdiobom širine $2a_2$ i modelira činjenicu da granice ulazne veličine nisu točno poznate. Ali čak i ako je a_2 30 posto od a_1, nesigurnost u premašuje $a_1/\sqrt{3}$ za manje od 5 posto.

4.3.10 Važno je da se sastavnice nesigurnosti ne "broje dvostruko". Ako se sastavnica nesigurnosti koja potječe od kakva posebna djelovanja dobiva određivanjem B-vrste, ona bi trebala biti uključena kao neovisna sastavnica nesigurnosti u izračunu sastavljene standardne nesigurnosti mjernog rezultata samo do te mjere da to djelovanje ne doprinosi opaženoj promjenljivosti tih opažanja. Tomu je razlog što je nesigurnost zbog tog udjela djelovanja koje doprinosi opaženoj promjenljvosti već uključena u sastavnicu nesigurnosti dobivenu statističkom analizom opažanja.

4.3.11 Rasprava o određivanju standardne nesigurnosti B-vrste u podtočkama od 4.3.3 do 4.3.9 samo je pokazna. Nadalje određivanja nesigurnosti trebala bi se u najvećoj mogućoj mjeri temeljiti na količinskim podatcima, kako je naglašeno u podtočkama 3.4.1 i 3.4.2.

4.4 Grafički prikaz određivanja brojčane vrijednosti standardne nesigurnosti

4.4.1 Slika 1. prikazuje procjenu vrijednosti ulazne veličine X_i i određivanje brojčane vrijednosti te procjene iz nepoznate razdiobe mogućih izmjerenih vrijednosti veličine X_i (ili razdiobe vjerojatnosti veličine X_i), tj. uzoraka dobivenih s pomoću opetovanih opažanja.

4.4.2 Na slici 1.a pretpostavlja se da je ta ulazna veličina X_i temperatura t i da je njezina nepoznata razdioba normalna s očekivanjem μ_t = 100 °C i standardnim odstupanjem σ = 1,5 °C. Njezina je gustoća vjerojatnosti, prema tomu, jednaka (vidi definiciju C.2.14):

$$p(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu_t}{\sigma}\right)^2\right]$$

NAPOMENA: Definicija funkcije gustoće vjerojatnosti $p(z)$ zahtijeva da bude zadovoljen odnos $\int p(z)\mathrm{d}z = 1$.

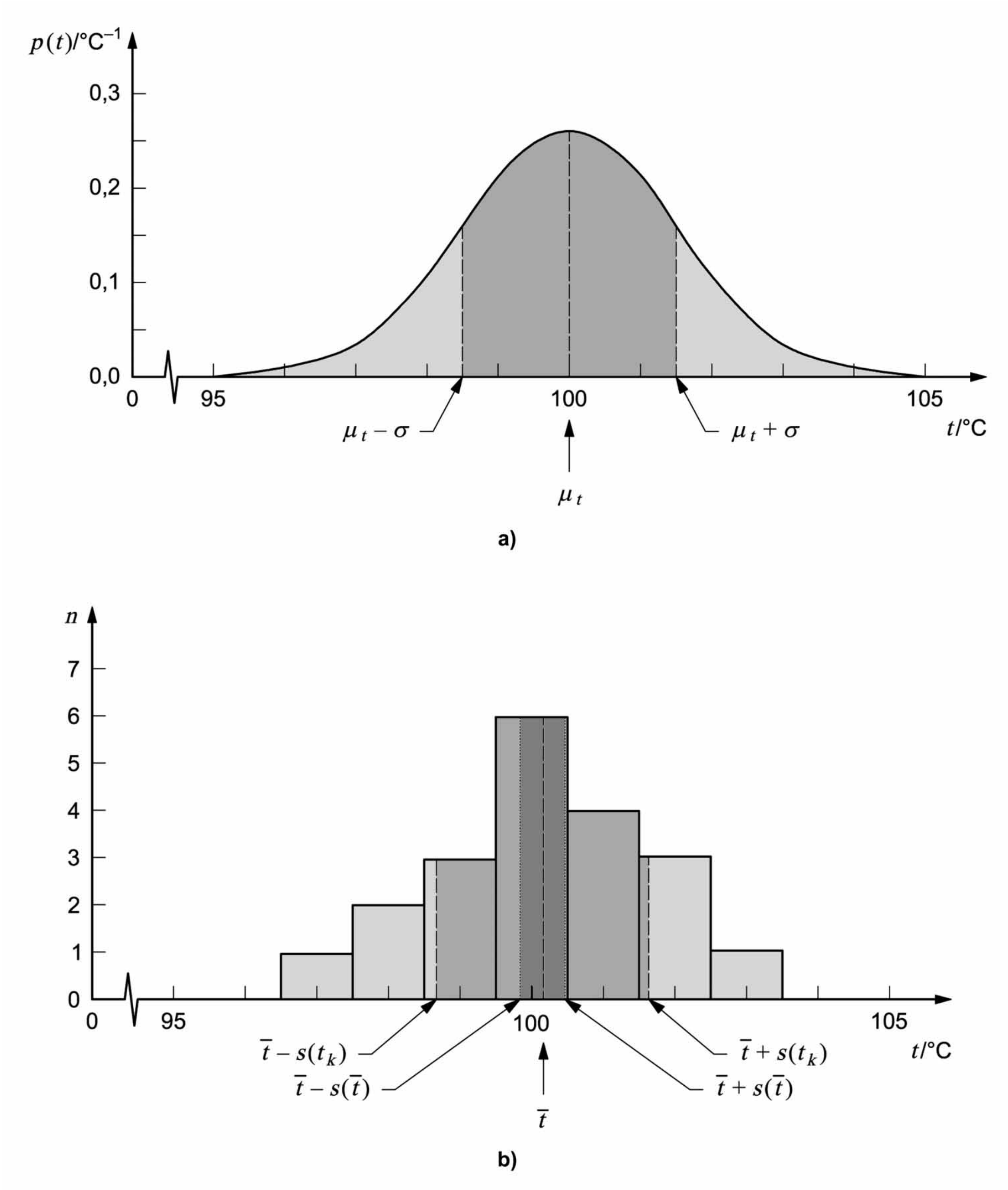
4.4.3 Slika 1.b prikazuje histogram od n = 20 opetovanih opažanja t_k temperature t za koja se pretpostavlja da su nasumce uzeta iz razdiobe na slici 1.a. Kako bi se dobio taj histogram u interval širine 1 °C skupljeno je n = 20 opažanja ili uzoraka čije su vrijednosti dane u tablici 1. (Za statističku se analizu podataka naravno ne zahtijeva priprema histograma).

Tablica 1.: Dvadeset uzastopnih opažanja temperature t skupljenih u intervalu širine 1 °C

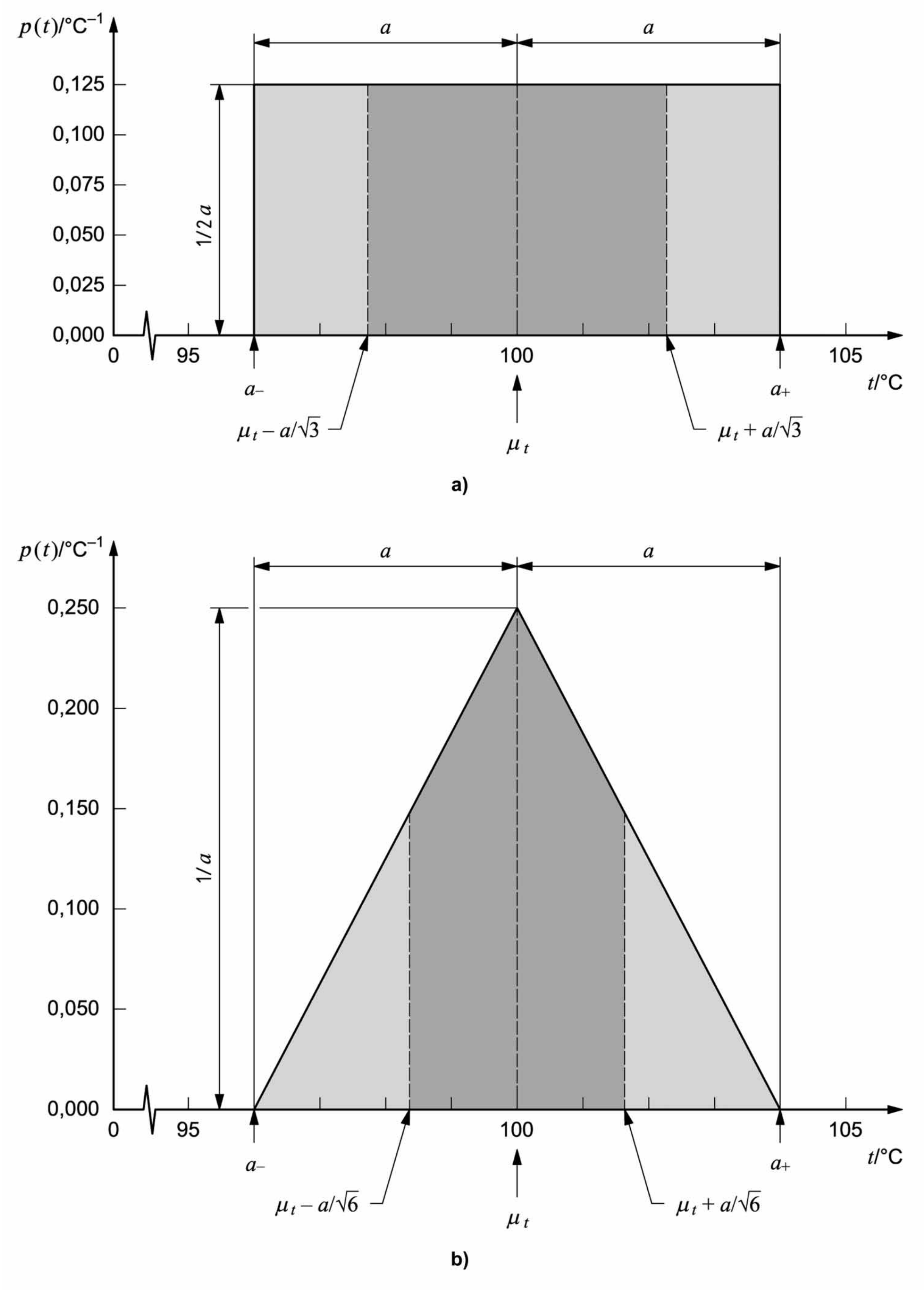
Interval $t_1 \leq t < t_2$		Temperatura t / °C
t_1 / °C	t_2 / °C	
94,5	95,5	–
95,5	96,5	–
96,5	97,5	96, 90
97,5	98,5	98,18; 98,25
98,5	99,5	98,61; 99,03; 99,49
99,5	100,5	95,56; 99,74; 99,89; 100,07; 100,33; 104,42
100,5	101,5	100,68; 100,95; 101,11; 101,20
101,5	102,5	101,57; 101,84; 102,36
102,5	103,5	102,72
103,5	104,5	–
104,5	105,5	–

Aritmetička sredina ili prosjek $\bar{t}$ od n = 20 opažanja izračunana u skladu s jednadžbom (3) jednaka je $\bar{t}$ = 100,145 °C ≈ 100,14 °C, a pretpostavlja se da je ona najbolja procjena očekivanja μ_t veličine t koja se temelji na dostupnim podatcima. Eksperimentalno standardno odstupanje srednje vrijednosti $s(t_k)$ izračunano je iz jednadžbe (4) jednako je $s(t_k)$ = 1,489 °C ≈ 1,49 °C, a eksperimentalno standardno odstupanje srednje vrijednosti $s(\bar{t})$ izračunano iz jednadžbe (5), što je jednako standardnoj nesigurnosti $u(\bar{t})$ srednje vrijednosti $\bar{t}$, jednako je $u(\bar{t}) = s(\bar{t}) = s(t_k)/\sqrt{20}$ = 0,333 °C ≈ 0,33 °C. (Za daljnja izračunavanja vjerojatno bi se zadržale sve znamenke).

NAPOMENA: Premda podatci u tablici 1. nisu nevjerojatni, uzimajući u obzir široku uporabu digitalnih elektroničkih toplomjera visokog razlučivanja, oni su dani u svrhu zornog prikaza i ne bi se trebali nužno tumačiti kao da opisuju kakvo stvarno mjerenje.



Slika 1.: Grafički prikaz određivanja standardne nesigurnosti ulazne veličine iz opetovanih opažanja



Slika 2.: Grafički prikaz određivanja standardne nesigurnosti ulazne veličine iz apriornih razdioba

4.4.4 Slika 2. prikazuje procjenu vrijednosti ulazne veličine X_i i određivanje vrijednosti nesigurnosti te procjene iz *apriorne* razdiobe mogućih vrijednosti veličine X_i na temelju svih raspoloživih podataka. Za oba prikazana slučaja za ulaznu veličinu opet se pretpostavlja da je temperatura t.

4.4.5 Za slučaj zorno prikazan na slici 2.a pretpostavlja se da je dostupno malo podataka o ulaznoj veličini t te da je sve što se može učiniti jest pretpostaviti da se t opisuje simetričnom pravokutnom *apriornom* razdiobom vjerojatnosti s donjom granicom $a_- = 96$ °C, gornjom granicom $a_+ = 104$ °C i poluširinom $a = (a_+ - a_-)/2 = 4$ °C (vidi podtočku 4.3.7). Funkcija gustoće vjerojatnosti tada je jednaka:

$$p(t) = 1/(2a)\,, \quad a_- \leq t \leq a_+$$

$$p(t) = 0\,, \quad \text{za druge vrijednosti veličine } t.$$

Kako je pokazano u podtočki 4.3.7, najbolja procjena veličine t njezino je očekivanje $\mu_t = (a_+ + a_-)/2 = 100$ °C, koje proizlazi iz podtočke C.3.1. Standardna nesigurnost te procjene jednaka je $u(\mu_t) = a/\sqrt{3} \approx 2{,}3$ °C, što slijedi iz podtočke C.3.2 [vidi jednadžbu (7)].

4.4.6 Za slučaj prikazan na slici 2b pretpostavlja se da su dostupni podatci koji se odnose na ulaznu veličinu t manje ograničeni i da se t može opisati *apriornom* simetričnom trokutnom razdiobom vjerojatnosti s istom donjom granicom $a_- = 96$ °C, istom gornjom granicom $a_+ = 104$ °C i, prema tomu, istom poluširinom $a = (a_+ - a_-)/2 =$ 4 °C, kao u podtočki 4.4.5 (vidi podtočku 4.3.9). Funkcija gustoće vjerojatnosti veličine t tada je jednaka:

$$p(t) = (t - a_-)/a^2\,, \quad a_- \leq t \leq (a_+ - a_-)/2$$

$$p(t) = (a_+ - t)/a^2\,, \quad (a_+ - a_-)/2 \leq t \leq a_+$$

$$p(t) = 0\,, \quad \text{za druge vrijednosti veličine } t.$$

Kako je pokazano u podtočki 4.3.9, očekivanje veličine t jednako je $\mu_t = (a_+ + a_-)/2 = 100$ °C, što slijedi iz podtočke C.3.1. Standardna nesigurnost te procjene jednaka je $u(\mu_t) = a/\sqrt{6} \approx 1{,}6$ °C, što proizlazi iz podtočke C.3.2 [vidi jednadžbu (9b)].

Gornja vrijednost $u(\mu_t) = 1{,}6$ °C može se uspoređivati s vrijednošću $u(\mu_t) = 2{,}3$ °C dobivenom u podtočki 4.4.5 iz pravokutne razdiobe iste širine od 8 °C; s vrijednošću $\sigma = 1{,}5$ °C iz normalne razdiobe sa slike 1.a, čija je širina od $-2{,}85\sigma$ do $+2{,}58\sigma$ koja obuhvaća 99 posto razdiobe približno jednaka 8 °C i s vrijednošću $u(\bar{t}) = 0{,}33$ °C dobivenom u podtočki 4.4.3 iz 20 opažanja pod pretpostavkom da su bili nasumce uzeti iz iste normalne razdiobe.

5 Određivanje sastavljene standardne nesigurnosti

5.1 Nekorelirane ulazne veličine

Ova podtočka obrađuje slučaj gdje su sve ulazne veličine **neovisne** (C.3.7). O slučaju kad su dvije ili više veličina povezane, tj. kad su međuovisne ili **korelirane** (C.2.8), govori se u podtočki 5.2.

5.1.1 Standardna nesigurnost veličine y, gdje je y procjena mjerene veličine Y, pa prema tomu i mjernog rezultata, dobiva se odgovarajućim sastavljanjem standardnih nesigurnosti procjene ulaznih veličina $x_1, x_2, \ldots, x_N$ (vidi podtočku 4.1). Ta *sastavljena standardna nesigurnost* procjene y označuje se s $u_c(y)$.

NAPOMENA: Iz razloga sličnih onima koji su navedeni u napomeni iz podtočke 4.3.1 u svim se slučajevima upotrebljavaju znakovi $u_c(y)$ i $u_c^2(y)$.

5.1.2 Sastavljena je standardna nesigurnost $u_c(y)$ pozitivni drugi korijen sastavljene varijancije $u_c^2(y)$, koja je dana izrazom:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) \tag{10}$$

gdje je funkcija f dana jednadžbom (1). Svako $u(x_i)$ standardna je nesigurnost određena prema opisu u podtočki 4.2 (određivanje A-vrste) ili prema opisu u podtočki 4.3 (izračun B-vrste). Sastavljena standardna nesigurnost $u_c(y)$ procjena je standardnog odstupanja i opisuje rasipanje vrijednosti koje bi se razumno moglo pripisati mjerenoj veličini Y (vidi podtočku 2.2.3).

Jednadžba (10) i njezina dvojnica za korelirane ulazne veličine, jednadžba (13), koje se temelje na približnom određenju funkcije $Y = f(X_1, X_2, ..., X_N)$ prvim članom njezina razvoja u Taylorov red, izražavaju ono što se u ovim *uputama* naziva *zakonom prijenosa nesigurnosti* (vidi podtočke E.3.1 i E.3.2).

NAPOMENA: Kad je nelinearnost funkcije f značajna, u izraz za $u_c^2(y)$ [jednadžba (10)] moraju se uključiti članovi višeg reda njezina razvoja u Taylorov red. Kad su razdiobe svih ulaznih veličina X_i simetrične oko svoje srednje vrijednosti, najvažniji članovi idućega višeg reda koji se trebaju dodati članovima jednadžbe (10) jesu:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j^2} \right] u^2(x_i) u^2(x_j)$$

Vidi podtočku H.1 kao primjer situacije gdje je potrebno uzeti u obzir doprinos članova višeg reda sastavljenoj varijanciji $u_c^2(y)$.

5.1.3 Parcijalne derivacije $\partial f/\partial x_i$ jednake su parcijalnim derivacijama $\partial f/\partial X_i$ izračunanim za $X_i = x_i$ (vidi napomenu 1. u ovoj točki). Te derivacije, koje se često nazivaju koeficijentima osjetljivosti, opisuju kako se procjena vrijednosti izlazne veličine y mijenja s promjenama vrijednosti procjena $x_1, x_2, \ldots, x_N$ ulaznih veličina. Posebno, promjena vrijednosti y proizvedena malom promjenom Δx_i procjene x_i ulazne veličine dana je izrazom $(\Delta y)_i = (\partial f/\partial x_i)(\Delta x_i)$. Ako tu promjenu proizvodi standardna nesigurnost procjene x_i, odgovarajuća promjena veličine y jednaka je $(\partial f/\partial x_i)\, u(x_i)$. Sastavljena varijancija $u_c^2(y)$ može se, prema tomu, promatrati kao zbroj članova od kojih svaki predstavlja procijenjenu varijanciju pridruženu procjeni izlazne veličine y proizvedene procijenjenom varijancijom pridruženom svakoj procjeni x_i ulazne veličine. To navodi da se jednadžba (10) napiše u obliku:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} [c_i u(x_i)]^2 \equiv \sum_{i=1}^{N} u_i^2(y) \tag{11a}$$

gdje je

$$c_i \equiv \partial f/\partial x_i, \quad u_i(y) \equiv |c_i| u(x_i) \tag{11b}$$

NAPOMENE:

1. Strogo govoreći, parcijalne derivacije $\partial f/\partial x_i = \partial f/\partial X_i$ izračunane su u očekivanjima veličine X_i. Međutim, u primjeni se ove parcijalne derivacije izračunaju s pomoću izraza:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left. \frac{\partial f}{\partial X_i} \right|_{x_1, x_2, \ldots, x_N}$$

2. Sastavljena standardna nesigurnost $u_c(y)$ može se brojčano izračunati zamjenom $c_i u(x_i)$ u jednadžbi (11a) s izrazom:

$$Z_i = \frac{1}{2} \{ f[x_1, \ldots, x_i + u(x_i), \ldots, x_N] - f[x_1, \ldots, x_i - u(x_i), \ldots, x_N] \}$$

Tj. $u_i(y)$ brojčano se određuje izračunom promjene veličine y nastale zbog promjene veličine x_i za $+u(x_i)$ i $-u(x_i)$. Za vrijednost $u_i(y)$ može se tada uzeti $|Z_i|$, a za vrijednost odgovarajućeg koeficijenta osjetljivost c_i vrijednost $Z_i/u(x_i)$.

PRIMJER: Za primjer iz podtočke 4.1.1, upotrebljavajući zbog pojednostavnjenja zapisa iste znakove i za veličinu i za njezinu procjenu, bit će:

$$c_1 \equiv \partial P/\partial V = 2V/\{R_0[1+\alpha(t-t_0)]\} = 2P/V$$

$$c_2 \equiv \partial P/\partial R_0 = -V^2/\{R_0^2[1+\alpha(t-t_0)]\} = -2P/R_0$$

$$c_3 \equiv \partial P/\partial \alpha = -V^2(t-t_0)/\{R_0[1+\alpha(t-t_0)]^2\} = -P(t-t_0)/[1+\alpha(t-t_0)]$$

$$c_4 \equiv \partial P/\partial t = -V^2\alpha/\{R_0[1+\alpha(t-t_0)]^2\} = -P\alpha/[1+\alpha(t-t_0)]$$

i

$$u^2(P) = \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)^2 u^2(V) + \left(\frac{\partial P}{\partial R_0}\right)^2 u^2(R_0) + \left(\frac{\partial P}{\partial \alpha}\right)^2 u^2(\alpha) + \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)^2 u^2(t) =$$

$$= [c_1 u(V)]^2 + [c_2 u(R_0)]^2 + [c_3 u(\alpha)]^2 + [c_4 u(t)]^2$$

$$= u_1^2(P) + u_2^2(P) + u_3^2(P) + u_4^2(P)$$

5.1.4 Katkad se koeficijenti osjetljivosti $\partial f/\partial x_i$ umjesto izračunavanja iz funkcije f određuju eksperimentalno mjerenjem promjene Y proizvedene promjenom posebne ulazne veličine X_i, dok se druge ulazne veličine drže stalnim. U tom se slučaju poznavanje funkcije f (ili kojeg njezina dijela, kad se tako određuje samo nekoliko koeficijenata osjetljivosti) prema tomu svodi na iskustveno određivanje članova prvog reda Taylorova razvoja funkcije, koje se temelji na izmjerenim koeficijentima osjetljivosti.

5.1.5 Ako se jednadžba (1) za mjerenu veličinu Y razvije oko nazivnih vrijednosti $X_{i,0}$ ulaznih veličina X_i, tada je za razvoj od članova prvog reda (što je obično prikladna aproksimacija) $Y = Y_0 + c_1\delta_1 + c_2\delta_2 + \ldots + c_N\delta_N$, gdje su vrijednosti $Y_0 =\ (X_{1,0}, X_{2,0}, ..., X_{N,0})$, $c_i = (\partial f/\partial x_i)$ određene u vrijednostima $X_i = X_{i,0}$, a $\delta_i = X_i - X_{i,0}$. Na taj se način za potrebe analize nesigurnosti mjerena veličina transformacijom njezinih ulaznih veličina od X_i na δ_i (vidi podtočku E.3.1) obično aproksimira linearnom funkcijom njezinih varijabla.

PRIMJER: Za primjer 2. iz podtočke 4.3.7, procjena vrijednosti mjerene veličine V, jednaka je $V = \overline{V} + \Delta V$, gdje je $\overline{V}$ = 0,928 571 V, $u(\overline{V})$ = 12 μV, pribrojivi ispravak $\Delta\overline{V} = 0$, a $u(\Delta\overline{V})$ = 8,7 μV. Budući da je $\partial V/\partial\overline{V} = 1$ i $\partial V/\partial(\Delta\overline{V}) = 1$, sastavljena varijancija pridružena veličini V dana je izrazom:

$$u_c^2(V) = u^2(\overline{V}) + u^2(\Delta\overline{V}) = (12\ \mu\mathrm{V})^2 + (8{,}7\ \mu\mathrm{V})^2 = 219 \times 10^{-12}\ \mathrm{V}^2$$

a sastavljena standardna nesigurnost jednaka je $u_c(V)$ = 15 μV, što odgovara relativnoj standardnoj nesigurnosti $u_c(V)/V$ od 16×10^{-6} (vidi podtočku 5.1.6). To je primjer slučaja gdje je mjerena veličina već linearna funkcija veličina o kojima ona ovisi s koeficijentima $c_i = +1$. Iz jednadžbe (10) ako je $Y = c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_NX_N$ i ako su stalnice $c_i = +1$ ili -1, proizlazi da je $u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} u^2(x_i)$.

5.1.6 Ako veličina Y ima oblik $Y = cX_1^{p1}X_2^{p2}...\,X_N^{pN}$ i ako su eksponenti p_i poznati pozitivni ili negativni brojevi koji imaju zanemarive nesigurnosti, sastavljena varijancija [jednadžba (10)] može se izraziti kao:

$$[u_c(y)/y]^2 = \sum_{i=1}^{N}[p_i u(x_i)/x_i]^2 \qquad (12)$$

Taj izraz ima isti oblik kao jednadžba (11a), ali sa sastavljenom varijancijom $u_c^2(y)$ izraženom kao *relativna sastavljena varijancija* $[u_c(y)/y]^2$ i procijenjenom varijancijom $u^2(x_i)$, pridruženom svakoj procjeni ulazne veličine, izraženom kao procijenjena *relativna varijancija* $[u_c(x_i)x_i]^2$ [*Relativna sastavljena standardna nesigurnost* jednaka je $u_c(y)/|y|$, a *relativna standardna nesigurnost* svake procjene ulazne veličine jednaka je $u(x_i)/|x_i|$, $|y| \neq 0$ i $|x_i| \neq 0$.]

NAPOMENE:

1. Kad Y ima taj oblik, njezina transformacija u linearnu funkciju varijabla (vidi podtočku 5.1.5) lako se dobije stavljanjem $X_i = X_{i,0}(1 + \delta_i)$, iz čega se dobije ovaj približni odnos: $(Y - Y_0)/Y_0 = \sum_{i=1}^{N} p_i\delta_i$. S druge strane, logaritamska transformacija $Z = \ln Y$ i $W_i = \ln X_i$ dovodi do točne linearizacije s novim varijablama: $Z = \ln c + \sum_{i=1}^{N} p_iW_i$.

2. Ako je p_i jednako +1 ili –1, jednadžba (12) postaje $[u_c(y)/y]^2 = \sum_{i=1}^{N} [u(x_i)/x_i]^2$, što pokazuje da su u ovome posebnom slučaju relativne sastavljene varijancije pridružene procjeni veličine y jednostavno jednake zbroju procijenjenih relativnih varijancija pridruženih procjenama x_i ulaznih veličina.

5.2 Korelirane ulazne veličine

5.2.1 Jednadžba (10) i iz nje izvedene jednadžbe, kao što su (11a) i (12), vrijede samo ako su ulazne veličine X_i neovisne ili nekorelirane (slučajne varijable, a ne fizičke veličine za koje se podrazumijeva da su invarijante [vidi podtočku 4.1.1, napomenu 1.]). Ako su neke od veličina X_i znatno korelirane i te se korelacije moraju uzeti u obzir.

5.2.2 Kad su ulazne veličine korelirane, odgovarajući izraz za sastavljenu varijanciju $u_c^2(y)$ pridruženu mjernom rezultatu glasi:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j) \tag{13}$$

gdje su x_i i x_j procjene veličina X_i i X_j, a $u(x_i, x_j) = u(x_j, x_i)$ procijenjene kovarijancije pridružene procjenama x_i *i* x_j. Stupanj korelacije između procjena x_i i x_j opisuje se procijenjenim **koeficijentom korelacije** (C.3.6).

$$r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_y)}{u(x_i)\, u(x_y)} \tag{14}$$

gdje je $r(x_i, x_j) = r(x_j, x_i)$ i $-1 \le r(x_i, x_j) \le +1$. Ako su procjene x_i i x_j neovisne, $r(x_i, x_j) = 0$, promjena jedne od njih ne podrazumijeva očekivanu promjenu druge. (Za daljnju raspravu vidi podtočke C.2.8, C.3.6 i C.3.7).

S pomoću korelacijskih koficijenata, koji se lakše tumače nego kovarijancije, kovarijancijski član jednadžbe (13) može se napisati kao:

$$2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1+i}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i)u(x_y)r(x_i, x_j) \tag{15}$$

Jednadžba (13) tada s pomoću jednadžbe (11b) postaje:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1+i}^{N} c_i c_j u(x_i)u(x_j)r(x_i, x_j) \tag{16}$$

NAPOMENE:

1. Za poseban slučaj gdje su sve procjene ulaznih veličina korelirane s korelacijskim koeficijentima $r(x_i, x_j) = +1$ jednadžba (16) svodi se na:

$$u_c^2(y) = \left[\sum_{i=1}^{N} c_i u(x_i)\right]^2 = \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} u(x_i)\right]^2$$

Sastavljena je standardna nesigurnost $u_c(y)$ dakle jednostavno jednaka *linearnom zbroju* članova koji predstavljaju promjenu procjene izlazne veličine y proizvedene standardnom nesigurnošću svake od procjena x_i ulaznih veličina (vidi podtočku 5.1.3). [Taj linearni zbroj ne smije se brkati s općim zakonom prijenosa pogrješke premda mu ima sličan oblik; standardne nesigurnosti nisu pogrješke (vidi podtočku E.3.2).]

PRIMJER: Deset otpornika, svaki nazivnog otpora $R_i = 1000\ \Omega$ umjerava se sa zanemarivom nesigurnošću usporedbe s pomoću istog etalonskog otpora R_S od 1000 Ω opisana standardnom nesigurnošću $u(R_S) = 100\ \text{m}\Omega$, kako je dano u njegovoj potvrdi o umjeravanju. Da bi se dobio referentni otpor R_{ref} nazivne vrijednosti 10 kΩ, ti se otpornici spajaju u seriju žicama koje imaju zanemariv otpor. Na taj je način $R_{ref} = f(R_i) = \sum_{i=1}^{10} R_i$. Budući da je za svaki otpornički par (vidi podtočku F.1.2.3, primjer 2) $r(x_i, x_j) = r(R_i, R_j) = +1$, primjenjuje se jednadžba iz ove napomene. Budući da je za svaki otpornik $\partial f/\partial x_i = \partial R_{ref}/\partial R_i = 1$ i $u(x_i) = u(R_i) = u(R_S)$ (vidi podtočku F.1.2.3, primjer 2), ta jednadžba za R_{ref} daje sastavljenu standardnu nesigurnost $u_c(R_{ref}) = \sum_{i=1}^{10} u(R_S) = 10 \times (100\ m\Omega) = 1\ \Omega$. Rezultat $u_c(R_{ref}) = \left[\sum_{i=1}^{10} u^2(R_S)\right]^{1/2} = 0{,}32\ \Omega$, dobiven iz jednadžbe (10), nije ispravan jer ne uzima u obzir da su sve umjerene vrijednosti tih deset otpornika korelirane.

2. Procijenjene varijancije $u^2(x_i)$ i procijenjene kovarijancije $u(x_i, x_j)$ mogu se smatrati elementima kovarijancijske matrice s elementima u_{ij}. Dijagonalni matrični elementi u_{ii} jednaki su varijancijama $u^2(x_i)$, dok su nedijagonalni elementi u_{ij} $(i \neq j)$ jednaki kovarijancijama $u(x_i, x_j) = u(x_j, x_i)$. Ako su procjene dviju ulaznih veličina nekorelirane, njima pridružene kovarijancije i odgovarajući elementi kovarijancijskih matrica u_{ij} i u_{ji} jednaki su 0. Ako su sve procjene ulaznih veličina nekorelirane, svi nedijagonalni elementi jednaki su ništici, a kovarijancijska je matrica dijagonalna (vidi također podtočku C.3.5).

3. Za brojčani izračun jednadžba (16) može se napisati kao:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} Z_i Z_j r(x_i, x_j)$$

gdje je Z_i dano u podtočki 5.1.3, napomeni 2.

4. Ako su ulazne veličine X_i koje imaju posebni oblik (razmatrane u podtočki 5.1.6) korelirane, tada se na desnu stranu jednadžbe (12) moraju dodati članovi:

$$2\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \left[p_i u(x_i)/x_i\right] \left[p_j u(x_j)/x_j\right] r(x_i, x_j)$$

5.2.3 Promatrajmo dvije aritmetičke sredine $\overline{q}$ i $\overline{r}$ koje procjenjuju očekivanja μ_q i μ_r dviju na slučajan način promjenjivih veličina q i r i neka se $\overline{q}$ i $\overline{r}$ izračunavaju iz n neovisnih parova istodobnih opažanja veličina q i r provedenih u istim mjernim uvjetima (vidi definiciju B.2.15). Tada se kovarijancije srednjih vrijednosti $\overline{q}$ i $\overline{r}$ procjenjuju izrazom (vidi podtočku C.3.4):

$$s(\overline{q}, \overline{r}) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n} (q_k - \overline{q})(r_k - \overline{r}) \qquad (17)$$

gdje su q_k i r_k pojedinačna opažanja veličina q i r, a $\overline{q}$ i $\overline{r}$ se izračunavaju iz tih opažanja u skladu s jednadžbom (3). Ako su u stvari ta opažanja nekorelirana, očekuje se da ta izračunana kovarijancija bude približno jednaka ništici.

Na taj se način procijenjene kovarijancije dviju koreliranih ulaznih veličina X_i i X_j, koje su procijenjene s pomoću srednjih vrijednosti $\overline{X}_i$ i $\overline{X}_j$ određenih iz parova neovisnih opetovanih opažanja, dane su izrazom $u(x_i, x_j) = s(\overline{X}_i, \overline{X}_j)$, s vrijednostima $s(\overline{X}_i, \overline{X}_j)$ izračunanim u skladu s jednadžbom (17). Ta je primjena jednadžbe (17) određivanje kovarijancije A-vrste. Procijenjeni koeficijent korelacije srednjih vrijednosti $\overline{X}_i$ i $\overline{X}_j$ dobiven je iz jednadžbe (14); $r(x_i, x_j) = r(\overline{X}_i, \overline{X}_j) = s(\overline{X}_i, \overline{X}_j)/\left[s(\overline{X}_i)s(\overline{X}_j)\right]$.

NAPOMENA: Primjeri u kojima je nužno upotrijebiti kovarijancije kako su izračunane iz jednadžbe (17) dani su u podtočkama H.2 i H.4.

5.2.4 Između dviju ulaznih veličina mogu postojati znatne korelacije ako se u njihovu određivanju upotrebljava isti mjerni instrument, isti fizički mjerni etalon ili isti referentni podatak sa znatnom standardnom nesigurnošću. Npr., ako se određeni toplomjer upotrebljava za određivanje ispravka temperature koji se zahtijeva za procjenu vrijednosti ulazne veličine X_i i ako se taj isti toplomjer upotrebljava za određivanje kojeg sličnog ispravka temperature koji se zahtijeva za procjenu ulazne veličine X_j, te dvije ulazne veličine mogle bi biti znatno korelirane. Međutim, ako se veličine X_i i X_j iz ovog primjera drukčije odrede, tako da ne budu korelirane, i uključe kao dodatne ulazne veličine s neovisnim standardnim nesigurnostima koje određuju krivulju umjeravanja toplomjera, između veličina X_i i X_j uklanja se korelacija. (Za daljnju raspravu vidi podtočke F.1.2.3 i F.1.2.4).

5.2.5 Korelacije između ulaznih veličina ne mogu se zanemariti ako postoje i ako su značajne. Vrijednosti pridruženih kovarijancija trebale bi se, ako je to ostvarivo, određivati eksperimentalno mijenjanjem koreliranih ulaznih veličina (vidi podtočku C.3.6, napomenu 3.) ili uporabom svih raspoloživih podataka o korelacijskoj promjenljivosti tih veličina (određivanje kovarijancije B-vrste). Kad se procjenjuje stupanj korelacije između ulaznih veličina koje potječu od djelovanja uobičajenih utjecaja, kao što su vanjska temperatura, barometarski tlak i vlažnost, zahtijeva se sposobnost opažanja koja se temelji na iskustvu i općem znanju (vidi podtočke 4.3.1 i

4.3.2). Nasreću, u mnogim slučajevima djelovanja takvih utjecaja imaju zanemarivu međuovisnost, te se za ulazne veličine na koje ta djelovanja utječu može pretpostaviti da su nekorelirane. Međutim, ako se ne može pretpostaviti da te veličine nisu nekorelirane, same korelacije mogu se izbjeći ako se zajednički utjecaji uvode kao dodatne neovisne ulazne veličine, kako je pokazano u podtočki 5.2.4.

6 Određivanje povećane nesigurnosti

6.1 Uvod

6.1.1 Preporuka INC-1 (1980) radne skupine za iskazivanje nesigurnosti na kojoj se temelje ove upute (vidi uvod) kao i preporuke 1 (CI-1981) i 1 (CI-1986) CIPM-a, kojima se odobrava i potvrđuje preporuka INC-a (1980) (vidi podtočke A.2 i A.3), zastupaju uporabu sastavljene standardne nesigurnosti $u_c(y)$ kao parametra za količinsko izražavanje mjernog rezultata. Doista, u drugoj od svojih preporuka CIPM zahtijeva da ono što se sada naziva sastavljenom standardnom nesigurnošću $u_c(y)$ upotrebljavaju "svi sudionici koji daju rezultate u svim međunarodnim usporedbama ili drugim poslovima koji se provode pod pokroviteljstvom CIPM-a i savjetodavnih odbora (Comité Consultatifs)".

6.1.2 Premda se sastavljena standardna nesigurnost $u_c(y)$ može sveobuhvatno upotrebljavati za izražavanje nesigurnosti mjernog rezultata, u nekim trgovačkim, industrijskim i upravnim primjenama te kad je riječ o zdravstvu i sigurnosti često je nužno dati mjeru nesigurnosti koja određuje interval oko mjernog rezultata za koji se može očekivati da obuhvaća velik dio razdiobe vrijednosti koje se razumno mogu pridružiti mjerenoj veličini. Postojanje tog zahtjeva priznala je radna skupina i stavila ga u 5. stavak preporuke INC-1 (1980). On se također održava i u preporuci 1 (CI-1986) CIPM-a.

6.2 Povećana nesigurnost

6.2.1 Dodatna mjera nesigurnosti koja zadovoljava zahtjev za osiguranje kojeg intervala te vrste naznačenog u podtočki 6.1.2 naziva se *povećanom nesigurnošću* i označuje slovom U. Povećana nesigurnost dobiva se množenjem sastavljene standardne nesigurnosti $u_c(y)$ *faktorom pokrivanja* k:

$$U = ku_c(y) \tag{18}$$

Mjerni rezultat tada se dogovorno izražava kao $Y = y \pm U$, čime se hoće reći da je y najbolja procjena vrijednosti koja se može pripisati mjerenoj veličini Y i da je $y - U$ do $y + U$ interval za koji se može očekivati da obuhvaća velik udio razdiobe vrijednosti koje bi se mogle razumno pripisati veličini Y. Takav interval također se izražava kao $y - U \leq Y \leq y + U$.

6.2.2 Nazivni **interval povjerenja** (C.2.27, C.2.28) i **razina povjerenja** (C.2.29) imaju u statistici posebne definicije i primjenjivi su na interval određen s povećanom nesigurnošću U samo kad su ispunjeni određeni uvjeti, uključujući uvjet da su sve sastavnice koje doprinose sastavljenoj standardnoj nesigurnosti $u_c(y)$ dobivene određivanjima A-vrste. U ovim se *uputama* na engleskom jeziku riječ "confidence (povjerenje)" ne upotrebljava za preinaku riječi "interval" kad se odnosi na interval definiran s pomoću U; a također se ne upotrebljava naziv "confidence level (razina povjerljivosti)" u svezi s tim intervalom nego naziv "level of confidence (razina povjerenja)". Točnije, tumači se da U određuje interval oko mjernog rezultata koji obuhvaća velik udio p razdiobe vjerojatnosti koji je opisan tim rezultatom i njegovom sastavljenom standardnom nesigurnošću, a p je *vjerojatnost pokrivanja* ili *razina povjerenja* tog intervala.

6.2.3 Kad god je to praktično moguće, trebalo bi za interval određen s povećanom nesigurnošću U procijeniti i navesti pridruženu razinu povjerenja p. Trebalo bi shvatiti da množidba $u_c(y)$ stalnim brojem ne daje nove podatke nego prikazuje otprije dostupne podatke u drugom obliku. Međutim, trebalo bi također shvatiti da je u većini slučajeva i razina povjerenja p (posebno za vrijednosti p blizu 1) prilično nesigurna, ne samo zbog ograničenog znanja razdiobe vjerojatnosti koju opisuju y i $u_c(y)$ (posebno u njezinim rubnim dijelovima) nego i zbog same nesigurnosti $u_c(y)$ (vidi napomenu 2. iz podtočaka 2.3.5, 6.3.2, 6.3.3 i dodatak G, posebno podtočku G.6.6).

NAPOMENA: Za preporučene načine navođenja mjernog rezultata kad je mjera nesigurnosti jednaka $u_c(y)$ i kad je jednaka U, vidi redom podtočke 7.2.2 i 7.2.4.

6.3 Odabir faktora pokrivanja

6.3.1 Vrijednost faktora pokrivanja k odabire se na temelju zahtijevane razine povjerenja za interval $y - U$ do $y + U$. Općenito k će biti u području između 2 i 3. Međutim, za posebne primjene k može biti i izvan tog područja. Izbor prave vrijednosti za k može olakšati bogato iskustvo i potpuno znanje primjena koje će se postavljati na mjerni rezultat.

NAPOMENA: Ponekad se može otkriti da na iskazani mjerni rezultat nije primijenjen poznati ispravak b zbog sustavnog djelovanja, nego je umjesto toga učinjen pokušaj da se ovo djelovanje uzme u obzir povećanjem "nesigurnosti" pridijeljene rezultatu. To bi trebalo izbjegavati; samo u posebnim okolnostima ne bi trebalo na mjerni rezultat primjenjivati ispravke poznatih značajnih sustavnih djelovanja (za poseban slučaj i njegovu obradbu vidi podtočku F.2.4.5). Određivanje mjerne nesigurnosti rezultata ne smije se brkati s pridjeljivanjem granice sigurnosti nekoj veličini.

6.3.2 U najboljem slučaju, željelo bi se moći odabrati posebnu vrijednost faktora pokrivanja k koja bi osiguravala da intervalu $Y = y \pm U = y \pm ku_c(y)$ odgovara posebna razina povjerenja p, kao npr. 95 ili 99 posto; isto tako, željelo bi se za određenu vrijednost k jednoznačno navesti razinu povjerenja pridruženu tom intervalu. Međutim, to u praksi nije lako učiniti jer zahtijeva dobro poznavanje razdiobe vrijednosti koju opisuju mjerni rezultat y i njegova sastavljena standardna nesigurnost $u_c(y)$. Premda su ti parametri od odlučne važnosti, oni sami nisu dostatni za utvrđivanje intervala s točno poznatim razinama povjerenja.

6.3.3 Preporuka INC-1 (1980) ne određuje kako bi se trebao uspostaviti odnos između k i p. O tom se problemu raspravlja u dodatku G, a metoda koja se preporučuje za njezino približno rješavanje prikazana je u podtočki G.4 i sažeto u podtočki G.6.4. Međutim, u mjernim situacijama gdje je razdioba vjerojatnosti opisana s y i $u_c(y)$ približno normalna, a broj stvarnih stupnjeva slobode sastavljene standardne nesigurnosti $u_c(y)$ značajan po iznosu, često je prikladan jednostavniji pristup o kojem se raspravlja u podtočki G.6.6. U tom slučaju, koji se često pojavljuje u praksi, može se pretpostaviti da uzimanje $k = 2$ daje interval koji ima razinu povjerenja od približno 95 posto, a uzimanje $k = 3$ daje interval koji ima razinu povjerenja od približno 99 posto.

NAPOMENA: U podtočki G.4 dana je metoda za procjenu broja stvarnih stupnjeva slobode za $u_c(y)$. Nakon toga može se za pomoć u odlučivanju o prikladnosti tog rješenja za pojedino mjerenje (vidi podtočku G.6.6) upotrijebiti tablica G.2 iz dodatka G.

7 Iskazivanje nesigurnosti

7.1 Opće upute

7.1.1 Općenito, što se više penje u mjernoj hijerarhiji, to se traži više pojedinosti o tome kako su dobiveni mjerni rezultat i njegova nesigurnost. Međutim, na svakoj razini te hijerarhije, uključujući trgovačke djelatnosti i djelatnosti na zakonskom uređivanju na tržištu, inženjerski rad u industriji, umjerne instalacije nižeg reda, industrijsko istraživanje i razvoj, znanstveno istraživanje, industrijske primarne i umjerne laboratorije te državne laboratorije za čuvanje etalona i BIPM, svi podatci nužni za ponovnu ocjenu mjerenja moraju biti na raspolaganju svima onima kojima bi mogli biti potrebni. Bitna je razlika što je na nižim razinama hijerarhijskog lanca većina potrebnih podataka dostupna u obliku objavljenih izvještaja o umjeravanju i ispitivanju sustava, specifikacija o ispitivanju, potvrda o umjeravanju i ispitivanju, uputa za uporabu, međunarodnih norma, nacionalnih norma i mjesnih propisa.

7.1.2 Kad se pojedinosti o mjerenju, uključujući i to kako je određena mjerna nesigurnost rezultata, osiguravaju upućivanjem na objavljene dokumente, kao što je često slučaj kad se rezultati umjeravanja iskazuju u potvrdi o umjeravanju, prijeko je potrebno da se ti objavljeni dokumenti posuvremenjuju tako da budu sukladni s mjernim postupkom koji je stvarno u uporabi.

7.1.3 Svaki se dan u industriji i trgovini provode brojna mjerenja bez izravnog iskazivanja nesigurnosti. Međutim, mnoga od njih provode se s instrumentima koji podliježu periodičnom umjeravanju ili zakonskom nadzoru. Ako je poznato da su ti instrumenti u skladu s njihovim specifikacijama ili postojećim normativnim dokumentima koji se primjenjuju, iz tih se specifikacija ili iz tih normativnih dokumenata može izvesti zaključak o nesigurnostima njihovih pokazivanja.

7.1.4 Premda u praksi količina podataka nužnih za dokumentiranje mjernog rezultata ovisi o njegovoj namjeravanoj uporabi, zahtijeva se da ovo temeljno načelo ostane nepromijenjeno: kad se iskazuje mjerni rezultat i njegova nesigurnost, bolje je pogriješiti tako da se osigura previše podataka nego premalo. Npr., trebalo bi:

a) jasno opisati metode koje se upotrebljavaju za izračunavanje mjernog rezultata i njegove nesigurnosti iz eksperimentalnih opažanja i ulaznih podataka;

b) navesti sve sastavnice nesigurnosti i iscrpno dokumentirati kako su izračunane;

c) prikazati analizu podataka na takav način da se svaki korak može lako pratiti, a izračun iskazanog rezultata po potrebi neovisno ponoviti;

d) dati sve ispravke i stalnice upotrijebljene u analizi te njihove izvore.

Za provjeru prethodnoga popisa treba se upitati: "Jesam li na dostatno jasan način osigurao dostatno podataka da se moj rezultat može u budućnosti posuvremeniti ako novi podatci postanu dostupni?"

7.2 Posebne upute

7.2.1 Kad se iskazuje mjerni rezultat i kad je mjera nesigurnosti sastavljena standardna nesigurnost $u_c(y)$, trebalo bi:

a) dati potpun opis definicije mjerene veličine Y

b) dati procjenu mjerene veličine Y i njezinu sastavljenu standardnu nesigurnost $u_c(y)$; uvijek bi trebalo dati jedinice za y i $u_c(y)$

c) uključiti, kad je to prikladno, relativnu sastavljenu standardnu nesigurnost $u_c(y)/|y|$, $|y| \neq 0$

d) dati podatke općenito prikazane u podtočki 7.2.7 ili uputiti na objavljene dokumente koji sadržavaju te podatke.

Ako se smatra da je to korisno za predviđene korisnike mjernog rezultata, npr. za pomoć u budućim izračunima faktora pokrivanja ili za pomoć u razumijevanju tog mjerenja, moguće je prikazati:

– procijenjeni stvarni broj stupnjeva slobode ν_{eff} (vidi podtočku G.4)

– sastavljene standardne nesigurnosti A-vrste i B-vrste $u_{cA}(y)$ i $u_{cB}(y)$ te njihovi procijenjeni stvarni brojevi stupnjeva slobode ν_{effA} i ν_{effB} (vidi podtočku G.4.1, napomenu 3).

7.2.2 Kad je $u_c(y)$ mjera nesigurnosti, a da bi se izbjeglo pogrješno razumijevanje, daje se prednost brojčanom navođenju mjernog rezultata u jednom od ova četiri oblika (Za veličinu čija se vrijednost iskazuje pretpostavlja se da je etalon mase m_S nazivne vrijednosti 100 g; riječi u zagradama mogu se zbog kratkoće ispustiti ako je mjerna nesigurnost u_c već negdje određena u dokumentu kojim se iskazuje taj rezultat):

1) "m_S = 100,021 47 g sa (sastavljenom standardnom nesigurnošću) u_c = 0,35 mg";

2) "m_S = 100,021 47 (35) g, gdje je broj u zagradama brojčana vrijednost (sastavljene standardne nesigurnosti) u_c koja se odnosi na odgovarajuće zadnje znamenke navedenog rezultata";

3) "m_S = 100,021 47 (0,000 35) g, gdje je broj u zagradama brojčana vrijednost (sastavljene standardne nesigurnosti) u_c izražena mjernom jedinicom navedenog rezultata";

4) "m_S = (100,021 47 ± 0,000 35) g, gdje je broj koji slijedi iza znaka ± brojčana vrijednost (sastavljene standardne nesigurnosti) u_c, a ne interval povjerenja".

NAPOMENA: Oblik ± trebalo bi izbjegavati kad god je to moguće jer se tradicionalno upotrebljava za prikaz intervala koji odgovara najvišoj razini povjerenja te se prema tomu može brkati s povećanom nesigurnošću (vidi podtočku 7.2.4). Nadalje, premda je svrha zagrada u 4) da se spriječi takvo brkanje, pisanje $Y = y \pm u_c(y)$ moglo bi se opet pogrješno razumjeti, posebno ako se slučajno ispusti zagrada. Tada bi se moglo misliti da je odabrana povećana nesigurnost s (faktorom pokrivanja) $k = 1$, a da interval $y - u_c(y) \le Y \le y + u_c(y)$ ima specificiranu razinu povjerenja p, tj. da je pridružen normalnoj razdiobi (vidi podtočku G.1.3). Kako je pokazano u podtočki 6.3.2 i dodatku G, tumačenje $u_c(y)$ na taj način obično je teško opravdati.

7.2.3 Kad se iskazuje mjerni rezultat i kad je povećana nesigurnost $U = ku_c(y)$ mjera nesigurnosti, trebalo bi:

a) dati potpun opis definicije mjerene veličine Y;

b) navesti mjerni rezultat u obliku $Y = y \pm U$ te dati jedinicu za y i U;

c) uključiti, kad je to prikladno, relativnu povećanu nesigurnost $U/|y|$, $|y| \neq 0$;

d) dati vrijednost faktora pokrivanja k upotrijebljenu da se dobije U [ili, zbog pogodnosti za korisnika rezultata, dati i k i $u_c(y)$];

e) dati približnu razinu povjerenja pridruženu intervalu $y \pm U$ i navesti kako je određena;

f) dati podatke općenito prikazane u podtočki 7.2.7 ili uputiti na objavljene dokumente koji sadržavaju te podatke.

7.2.4 Kada je U mjera nesigurnosti, poradi najveće jasnoće daje se prednost navođenju brojčane vrijednosti mjernog rezultata u obliku danom u ovom primjeru. (Riječi u zagradama mogu se zbog kratkoće ispustiti ako su U, u_c i k određeni već negdje u dokumentu kojim se iskazuje taj rezultat):

> "m_S = (100,021 47 ± 0,000 79) g, gdje je broj koji stoji iza znaka ± jednak brojčanoj vrijednosti (povećane standardne nesigurnosti) $U = ku_c$, s U određenim iz (sastavljene standardne nesigurnosti) u_c = 0,35 mg i (faktora pokrivanja) k = 2,26 na temelju t-razdiobe s $\nu = 9$ stupnjeva slobode, a određuje interval procijenjen s razinom povjerenja od 95 %".

7.2.5 Ako se mjerenjem određuje istodobno više mjerenih veličina, tj. ako ono daje više procjena izlaznih veličina y_i (vidi podtočke H.2, H.3 i H.4), tada osim davanja y_i i $u_c(y_i)$ treba dati i kovarijancijsku matricu elemenata $u(y_i, y_j)$ ili elemente $r(y_i, y_j)$ **matrice korelacijskih koeficijenata** (C.3.6, napomena 2.), a najbolje i jedno i drugo.

7.2.6 Brojčane vrijednosti procjene y i njezine standardne nesigurnosti $u_c(y)$ ili povećane nesigurnosti U ne bi se trebale davati s prekomjernim brojem znamenaka. Obično su za navođenje $u_c(y)$ i U [kao i standardnih nesigurnosti $u(x_i)$ procjena x_i ulaznih veličina] dostatne dvije najvažnije znamenke, premda u nekim slučajevima može biti nužno zadržati dodatne znamenke kako bi se izbjegle pogrješke zaokruživanja u daljnjim izračunavanjima.

U iskazivanju konačnih rezultata katkad može biti prikladno zaokruživati nesigurnosti na višu prije nego na najbližu znamenku. Npr. $u_c(y)$ = 10,47 mΩ moglo bi se zaokružiti na više, na 11 mΩ. Međutim, tu bi trebalo prevladavati zdrav razum, te bi npr. vrijednost $u(x_i)$ = 28,05 kHz trebalo zaokružiti na nižu vrijednost, na 28 kHz. Procjene ulaznih i izlaznih veličina trebale bi se zaokruživati da budu u skladu sa svojim nesigurnostima; npr. ako je y = 10,057 62 Ω s $u_c(y)$ = 27 mΩ, y bi trebalo zaokružiti na 10,058 Ω. Koeficijenti korelacije trebali bi se davati s troznamenkastom točnošću ako su njihove apsolutne vrijednosti blizu jedinici.

7.2.7 U iscrpnom izvještaju koji opisuje kako su dobiveni mjerni rezultat i njegova nesigurnost trebalo bi slijediti preporuke iz podtočke 7.1.4 i prema tomu:

a) dati vrijednost svake procjene x_i ulazne veličine i njezine standardne nesigurnosti $u(x_i)$ zajedno s opisom kako su one dobivene;

b) dati procijenjene kovarijancije ili procijenjene koeficijente korelacije (poželjno i jedno i drugo) pridružene svim procjenama ulaznih veličina koje su korelirane i metodama koje su primijenjene za njihovo dobivanje;

c) dati broj stupnjeva slobode za standardnu nesigurnost svake procjene ulazne veličine i kako je on dobiven;

d) dati funkcijski odnos $Y = f(X_1, X_2, ..., X_N)$ i, kad se to čini korisnim, parcijalne derivacije ili koeficijente osjetljivosti $\partial f/\partial x_i$. Međutim, trebali bi biti dani svi takvi eksperimentalno određeni koeficijenti.

NAPOMENA: Budući da funkcijski odnos f može biti veoma složen ili pak ne postojati u eksplicitnom obliku nego samo kao kakav računalni program, može biti nemoguće uvijek dati funkciju f i njezine derivacije. Ta funkcija f može se tada opisati općenito ili se upotrijebljeni program može navesti kao odgovarajuća uputnica. U takvim je slučajevima veoma važno da bude jasno kako su dobivene procjena y mjerene veličine Y i njezina sastavljena standardna nesigurnost $u_c(y)$.

8 Sažetak postupka izračunavanja i iskazivanja nesigurnosti

Koraci koji se pri određivanju i izražavanju nesigurnosti mjernog rezultata, kako je izloženo u ovim *uputama*, trebaju slijediti mogu se sažeti ovako:

1. Matematički izraziti odnos između mjerene veličine Y i ulaznih veličina X_i o kojima Y ovisi: $Y = f(X_1, X_2, ..., X_N)$. Ta funkcija f morala bi sadržavati svaku veličinu, uključujući sve ispravke i faktore ispravaka koji mogu doprinijeti mjernom rezultatu (vidi podtočku 4.1.1 i 4.1.2) kakvom značajnom sastavnicom nesigurnosti.
2. Odrediti x_i, procijenjenu vrijednost ulazne veličine X_i, na temelju statističke analize niza opažanja ili na drugi način (vidi podtočku 4.1.3).
3. Odrediti *standardnu nesigurnost* $u(x_i)$ svake procjene ulazne veličine x_i. Za procjenu ulazne veličine dobivenu statističkom analizom niza opažanja standardna nesigurnost izračunava se prema opisu u podtočki 4.2 (*određivanje standardne nesigurnosti A-vrste*). Za procjenu ulazne veličine dobivenu na drugi način standardna nesigurnost $u(x_i)$ izračunava se prema opisu u 4.3 (*određivanje standardne nesigurnosti B-vrste*).
4. Odrediti kovarijancije pridružene procjenama svih ulaznih veličina koje su korelirane (vidi podtočku 5.2).
5. Izračunati mjerni rezultat, tj. procjenu y mjerene veličine Y, iz funkcijskog odnosa f s pomoću ulaznih veličina X_i, čije su procjene x_i dobivene u koraku 2. (vidi podtočku 4.1.4).
6. *Sastavljenu standardnu nesigurnost* $u_c(y)$ mjernog rezultata y odrediti iz standardnih nesigurnosti, a kovarijancije pridružene procjenama ulaznih veličina odrediti prema opisu u točki 5. Ako se mjerenjem istodobno određuje više izlaznih veličina, izračunati njihove kvarijancije (vidi podtočke 7.2.5, H.2, H.3 i H.4).
7. Ako je nužno dati *povećanu nesigurnost* U, čija je svrha dobiti koji interval $y - U$ do $y + U$ za koji se može očekivati da obuhvaća velik dio razdiobe vrijednosti koje bi se razumno mogle pripisati mjerenoj veličini Y, da bi se dobila povećana nesigurnost $U = ku_c(y)$, sastavljenu standardnu nesigurnost $u_c(y)$ pomnožiti *faktorom pokrivanja* k (koji se obično kreće u području između 2 i 3). Faktor pokrivanja k odabrati na temelju željene razine povjerenja za taj interval (vidi podtočke 6.2, 6.3, a posebno dodatak G, u kojem se raspravlja o odabiru vrijednosti k koja daje interval koji ima razinu povjerenja blisku navedenoj vrijednosti).
8. Iskazati mjereni rezultat y zajedno s njegovom sastavljenom standardnom nesigurnošću $u_c(y)$ ili povećanom nesigurnošću U, kako je razmatrano u podtočkama 7.2.1 i 7..3; upotrijebiti jedan od oblika preporučenih u podtočkama 7.2.2 i 7.2.4. Opisati prema općem prikazu u točki 7, kako su dobiveni y i $u_c(y)$ ili U.

Dodatak A

Preporuke Radne skupine i CIPM-a

A.1 Preporuka INC-1 (1980)

Radnu skupinu za iskazivanje nesigurnosti (vidi predgovor) sazvao je u listopadu 1980. godine Međunarodni ured za utege i mjere (BIPM) kao odgovor na zahtjev Međunarodnog odbora za utege i mjere (CIPM). Ona je priredila iscrpan izvještaj za razmatranje CIPM-u koji je zaključen preporukom INC-1 (1980) [2]. Hrvatski prijevod te preporuke dan je u točki 0.7 ovih uputa, a službeni francuski tekst je ovaj [2]:

Expression des incertitudes expérimentales

Recommandation INC-1 (1980)

1) L'incertitude d'un résultat de mesure comprend généralement plusieurs composantes qui peuvent être groupées en deux catégories d'après la méthode utilisée pour estimer leur valeur numérique:

   A. celles qui sont évaluées à l'aide de méthodes statistiques,

   B. celles qui sont évaluées par d'autres moyens.

   Il n'y a pas toujours une correspondance simple entre le classement dans les catégories A ou B et le caractère «aléatoire» ou «systématique» utilisé antérieurement pour classer les incertitudes. L'expression «incertitude systématique» est susceptible de conduire à des erreurs d'interprétation; elle doit être évitée.

   Toute description détaillée de l'incertitude devrait comprendre une liste complète de ses composantes et indiquer pour chacune la méthode utilisée pour lui attribuer une valeur numérique.

2) Les composantes de la catégorie A sont caractérisées par les variances estimées s_i^2 (ou les «écart-types» estimés s_i) et les nombres ν_i de degrés de liberté. Le cas échéant, les covariances estimées doivent être données.

3) Les composantes de la catégorie B devraient être caractérisées par des termes u_j^2 qui puissent être considérés comme des approximations des variances correspondantes dont on admet l'existence. Les termes u_j^2 peuvent être traités comme des variances et les termes u_j comme des écarts-types. Le cas échéant, les covariances doivent être traitées de façon analogue.

4) L'incertitude composée devrait être caractérisée par la valeur obtenue en appliquant la méthode usuelle de combinaison des variances. L'incertitude composée ainsi que ses composantes devraient être exprimées sous la forme d'«écart-types».

5) Si pour des utilisations particulières on est amené à multiplier par un facteur l'incertitude composée afin d'obtenir une incertitude globale, la valeur numérique de ce facteur doit toujours être donnée.

A.2 Preporuka 1 (CI-1981)

CIPM je kritički pregledao izvještaj koji mu je podnijela radna skupina za iskazivanje nesigurnosti i prihvatio ovu preporuku na svojemu 70. sastanku održanom u listopadu 1981. godine [3]:

Preporuka 1 (CI-1981)

Izražavanje eksperimentalnih nesigurnosti

Međunarodni odbor za utege i mjere

uzimajući u obzir

– potrebu da se nađe sporazuman način izražavanja mjerne nesigurnosti u mjeriteljstvu

– tome posvećeno višegodišnje nastojanje mnogih organizacija

– ohrabrujući napredak učinjen na nalaženju prihvatljivog rješenja koje je proizašlo iz rasprava radne skupine za iskazivanje nesigurnosti koja se sastala u BIPM-u 1980. godine,

priznaje

– da bi prijedlozi radne skupine mogli činiti temelj za konačni dogovor o izražavanju nesigurnosti,

preporučuje

– da se prijedlozi radne skupine učine dostupnim širem krugu zainteresiranih

– da BIPM u idućim godinama pokuša ta načela primijeniti u međunarodnim usporedbama koje se provode pod njegovim pokroviteljstvom

– da se potaknu druge zainteresirane organizacije da provjere i ispitaju te prijedloge i daju primjedbe BIPM-u

– da nakon dvije ili tri godine izvijeste BIPM o primjeni tih prijedloga.

A.3 Preporuka 1 (CI-1986)

CIPM je opet razmotrio predmet izražavanja nesigurnosti na svojemu 75. sastanku održanu u listopadu 1986. godine i prihvatio ovu preporuku [4]:

Preporuka 1 (CI-1986)

Izražavanje nesigurnosti u radu koji se provodi pod pokroviteljstvom CIPM-a

Međunarodni odbor za utege i mjere

uzimajući u obzir da je radna skupina za iskazivanje nesigurnosti prihvatila preporuku INC-1 (1980) te da je CIPM prihvatio preporuku 1 (CI-1981)

uzimajući u obzir da određeni članovi savjetodavnih odbora mogu željeti objašnjanja te preporuke zbog posla koji je u njihovu djelokrugu, posebno zbog međunarodnih usporedba

priznaje da stavak 5. preporuke INC-1 (1980) koji se odnosi na posebne primjene, posebno one koji imaju trgovačko značenje, koji sada razmatra radna skupina Međunarodne organizacije za normizaciju (ISO) zajednički za ISO, OIML i IEC u suglasnosti i suradnji s CIPM-om,

zahtijeva da stavak 4. preporuke INC-1 (1980) primjenjuju svi sudionici u davanju razultata svih međunarodnih usporedba ili drugih poslova koji se provode pod pokroviteljstvom CIPM-a i savjetodavnih odbora te da se sastavljene nesigurnosti A-vrste i B-vrste daju u obliku *jednog standardnog odstupanja*.

Dodatak B

Opći mjeriteljski nazivi

B.1 Izvor definicija

Definicije općih mjeriteljskih naziva bitnih za ove *upute*, a koja se daju na ovom mjestu, preuzete su iz *Međunarodnog rječnika osnovnih i općih naziva u metrologiji* (skraćeno VIM), drugo izdanje, 1993. godine* [6], koji je objavila Međunarodna organizacija za normizaciju ISO u ime četiriju organizacija koje su podupirale njegov razvoj i imenovale stručnjake koji su priredili: Međunarodni ured za utege i mjere (BIPM), Međunarodno elektrotehničko povjerenstvo (IEC), Međunarodna federacija za kliničku kemiju (IFCC), ISO, Međunarodna udruga za čistu i primijenjenu kemiju (IUPAC), Međunarodna udruga za čistu i primijenjenu fiziku (IUPAP) i Međunarodna organizacija za zakonsku metrologiju (OIML). VIM bi trebao biti prvi izvor koji se uzima u obzir za definicije pojmova koji nisu uključeni u ovoj točki ili u ovom tekstu.

NAPOMENA: Neki temeljni statistički nazivi i pojmovi daju se u dodatku C, dok se nazivi "istinita vrijednost", "pogrješka" i "nesigurnost" dodatno razmatraju u dodatku D.

B.2 Definicije

Kao i u točki 2 i u ovim određenjima uporaba zagrada oko određenih riječi nekih naziva znači da se te riječi mogu ispustiti ako nije vjerojatno da će to izazvati zabunu.

Masno tiskani nazivi u nekim napomenama dodatni su mjeriteljski nazivi određeni izravno ili neizravno u tim napomenama (vidi [6]).

B.2.1
(mjerljiva) veličina
svojstvo koje pojave, tijela ili tvari koje se može kvalitativno razlikovati i kvantitativno odrediti

NAPOMENE:

1. Nazivi veličina mogu se odnositi na koju veličinu u općem smislu [vidi primjer 1] ili na koju **posebnu veličinu** [vidi primjer 2].

PRIMJERI:

1) veličina u općem smislu: duljina, vrijeme, masa, temperatura, električni otpor, iznos koncentracije tvari

2) posebne veličine:

– duljina određenog štapa

– električni otpor određenog uzorka žice

– iznos koncentracije etanola u određenom uzorku vina.

2. Veličine koje se mogu razvrstati po veličini jedna u odnosu na drugu nazivaju se **veličinama iste vrste**.

---

* **Fusnota uz verziju iz 2008. godine:**

Treće izdanje rječnika objavljeno je 2008. godine pod naslovom JCGM 200:2008, *Međunarodni mjeriteljski rječnik – Osnovni i opći pojmovi i pridruženi nazivi (VIM)*.

3. Veličine iste vrste mogu se razvrstati u **razrede veličina**, primjerice:

– rad, toplina, energija

– debljina, opseg, valna duljina.

4. **Znakovi veličina** dani su u normi ISO 31*.

[VIM:1993, definicija 1.1]

B.2.2
vrijednost (veličine)
velikoća koja posebne veličine koja se općenito izražava umnoškom jedne mjerne jedinice kojim brojem

PRIMJERI

1)	duljina određenog štapa:	5,34 m	ili	534 cm
2)	masa određenog tijela:	0,152 kg	ili	152 g
3)	količina tvari određenog uzorka vode (H_2O):	0,012 mol	ili	12 mmol.

NAPOMENE:

1. Vrijednost određene veličine može biti pozitivna, negativna ili ništica.
2. Vrijednost određene veličine može se izraziti na više načina.
3. Vrijednosti veličina dimenzije jedan općenito se izražavaju kao čisti brojevi.
4. Veličina koja se ne može izraziti kao mjerna jedinica pomnožena kojim brojem, može se izraziti njezinim odnosom prema kojoj dogovorenoj referentnoj ljestvici ili kojim mjernim postupkom ili na oba načina.

[VIM:1993, definicija 1.18]

B.2.3
istinita vrijednost (veličine)
vrijednost sukladna određenju dane posebne veličine

NAPOMENE:

1. To je vrijednost koja bi se dobila savršenim mjerenjem.
2. Istinite vrijednosti po prirodi su neodredive.
3. (U engleskom jeziku) se u svezi s "istinitom vrijednosti" radije rabi neodređeni član "a" nego određeni član "the" jer bi moglo postojati mnogo vrijednosti podudarnih s definicijom neke posebne veličine.

[VIM:1993, definicija 1.19]

Objašnjenje *uputa*: Vidi dodatak D, posebno podtočku D.3.5 za razloge zašto se naziv "istinita vrijednost" ne upotrebljava u ovim *uputama* i zašto se nazivi "istinita vrijednost mjerene veličine" (ili veličine) i "vrijednost mjerene veličine" (ili veličine) smatraju istovrijednim.

B.2.4
dogovorena istinita vrijednost (veličine)
vrijednost pripisana kojoj posebnoj veličini za koju je prihvaćeno, katkad dogovorom, da za određenu danu svrhu ima primjerenu nesigurnost

PRIMJERI:

1) Na danom mjestu, vrijednost dodijeljena veličini koja je ostvarena referentnim etalonom može se uzimati kao dogovorena istinita vrijednost.

2) CODATA (1986.) preporučila je vrijednost za Avogadrovu stalnicu: 6,022 136 7 × 10^{23} mol^{-1}.

---

* **Fusnota uz verziju iz 2008. godine:**
Niz norma ISO 31 prerađuje se kao niz dokumenata ISO 80000 i IEC 80000. (Neki od tih dokumenata već su objavljeni).

NAPOMENE:

1. "Dogovorena istinita vrijednost" katkad se naziva **dodijeljena vrijednost, najbolja procjena** vrijednosti, **dogovorena vrijednost** ili **referentna vrijednost**. "Referentnu vrijednost" u tom smislu ne bi trebalo brkati s "referentnom vrijednošću" u smislu u kojem se upotrebljava u napomeni u definiciji 5.7, napomeni u VIM-u:1993.

2. Za utvrđivanje dogovorene istinite vrijednosti često se upotrebljava veći broj rezultata mjerenja veličine.

[VIM:1993, definicija 1.20]

Objašnjenje *uputa*: Vidi objašnjenje uputa uz definiciju B.2.3

B.2.5
mjerenje
skup postupaka kojima se određuje vrijednost kakve veličine

NAPOMENA: Ti se postupci mogu provoditi automatski.

[VIM:1993, definicija 2.1]

B.2.6
mjerno načelo
znanstvena osnova mjerenja

PRIMJERI:

1) termoelektrični pojav primijenjen za mjerenje temperature
2) Josephsonov pojav primijenjen za mjerenje električnog napona
3) Dopplerov pojav primijenjen za mjerenje brzine
4) Ramanov pojav primijenjen za mjerenje valnoga broja molekularnih vibracija.

[VIM:1993, definicija 2.3]

B.2.7
mjerna metoda
smislen niz postupaka, opisanih prema rodu, koji se upotrebljavaju za provođenje mjerenja

NAPOMENA: Mjerne metode mogu se pobliže odrediti na različite načine, npr.:

– metoda zamjene
– diferencijalna metoda
– ništična metoda

[VIM:1993, definicija 2.4]

B.2.8
mjerni postupak
skup postupaka, opisanih prema vrsti, koji se upotrebljavaju za provođenje pojedinih mjerenja u skladu s određenom metodom.

NAPOMENA: Mjerni postupak obično se zapisuje u kakav dokument koji se katkad i sam naziva "mjernim postupkom" (ili **mjernom metodom**), a obično je dostatno iscrpan da omogućuje rukovatelju provedbu mjerenja bez dodatnih podataka.

[VIM:1993, definicija 2.5]

B.2.9
mjerena veličina (veličina koju treba mjeriti)
posebna veličina podvrgnuta mjerenju

PRIMJER: Tlak para određenog uzorka vode kod 20 °C.

NAPOMENA: Specifikacija mjerene veličine može zahtijevati navođenje veličina kao što su vrijeme, temperatura i tlak.

[VIM:1993, definicija 2.6]

B.2.10
utjecajna veličina
veličina koja nije mjerena veličina, ali utječe na mjerni rezultat

PRIMJERI:

1) temperatura mikrometra koji se upotrebljava za mjerenje duljine

2) čestoća pri mjerenju vršne vrijednosti izmjeničnog električnog napona

3) koncentracija bilirubina pri mjerenju koncentracije hemoglobina u uzorku ljudske krvne plazme.

[VIM:1993, definicija 2.7]

Objašnjenje *uputa*: Podrazumijeva se da definicija utjecajne veličine uključuje vrijednosti pridružene mjernim etalonima, referentnim tvarima i referentnim podatcima o kojima mjerni rezultat može ovisiti, kao i o pojavama kao što su kratkotrajna kolebanja mjernog instrumenta i veličinama kao što su temperatura okoliša, barometarski tlak i vlažnost.

B.2.11
mjerni rezultat
vrijednost dobivena mjerenjem pripisana kojoj mjerenoj veličini

NAPOMENE:

1. Kad se daje koji rezultat, trebalo bi jasno naznačiti odnosi li se na:

– pokazivanje

– neispravni rezultat

– ispravljeni rezultat

i je li to prosjek više vrijednosti.

2. Potpuno navođenje mjernog rezultata uključuje podatke o mjernoj nesigurnosti.

[VIM:1993, definicija 3.1]

B.2.12
neispravljeni rezultat
mjerni rezultat prije ispravljanja sustavne pogrješke

[VIM:1993, definicija 3.3]

B.2.13
ispravljeni rezultat
mjerni rezultat nakon ispravljanja sustavne pogrješke

[VIM:1993, definicija 3.4]

B.2.14
mjerna točnost
usko slaganje između kojeg mjernog rezultata i istinite vrijednosti mjerene veličine

NAPOMENE:

1. "Točnost" je kvalitativni pojam.

2. Naziv **preciznost** ne smije se upotrebljavati umjesto "točnosti".

[VIM:1993, definicija 3.5]

Objašnjene *uputa*: Vidi objašnjenje *uputa* uz definiciju B.2.3.

B.2.15
ponovljivost (mjernih rezultata)
usko slaganje između rezultata uzastopnih mjerenja iste mjerene veličine izvedenih u istim mjernim uvjetima

NAPOMENE:

1. Ti se uvjeti nazivaju **uvjetima ponovljivosti**.
2. Uvjeti ponovljivosti uključuju:

– isti mjerni postupak
– istog motritelja
– isti mjerni instrument upotrijebljen u istim uvjetima
– isto mjesto
– ponavljanje u kratkom razdoblju.

3. Ponovljivost se može izraziti kvantitativno s pomoću značajka rasipanja rezultata.

[VIM:1993, definicija 3.6]

B.2.16
obnovljivost (mjernih rezultata)
usko slaganje između mjernih rezultata iste mjerene veličine izvedenih u promijenjenim mjernim uvjetima

NAPOMENE:

1. Valjano određivanje obnovljivosti zahtijeva točno navođenje promijenjenih uvjeta.
2. Promijenjeni uvjeti mogu uključivati:

– mjerno načelo
– mjernu metodu
– motritelja
– mjerni instrument
– referentni etalon
– mjesto
– uvjete uporabe
– vrijeme.

3. Obnovljivost se može količinski izraziti s pomoću značajka rasipanja rezultata.
4. Rezultati o kojima se ovdje govori obično su ispravljeni rezultati.

[VIM:1993, definicija 3.7]

B.2.17
eksperimentalno standardno odstupanje
veličina $s(q_k)$ koja za niz od n mjerenja iste mjerene veličine opisuje rasipanje rezultata, a dana je formulom:

$$s(q_k) = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}(q_j - \overline{q})^2}{n-1}}$$

gdje je q_k rezultat k-tog mjerenja, a $\overline{q}$ aritmetička sredina n razmatranih rezultata.

NAPOMENE:

1. Smatrajući da je niz od n vrijednosti uzorak kakve razdiobe, $\overline{q}$ je nepristrana procjena srednje vrijednosti μ_q, a $s^2(q_k)$ nepristrana procjena varijancije σ^2 te razdiobe.

2. Izraz $s(q_k)/\sqrt{n}$ procjena je standardnog odstupanja razdiobe veličine $\overline{q}$, a naziva se **eksperimentalnim standardnim odstupanjem srednje vrijednosti**.

3. "Eksperimentalno standardno odstupanje srednje vrijednosti" katkad se pogrješno naziva **standardnom pogrješkom srednje vrijednosti**.

4. Prilagođeno iz VIM-a:1993, definicija 3.8.

Objašnjenje *uputa:* Neki znakovi koji se upotrebljavaju u VIM-u izmijenjeni su da bi se postiglo slaganje s načinom pisanja koji se upotrebljava u podtočki 4.2 ovih *uputa.*

B.2.18
mjerna nesigurnost
parametar pridružen rezultatu kojeg mjerenja koji opisuje rasipanje vrijednosti koje bi se razumno moglo pripisati mjerenoj veličini

NAPOMENE:

1. Taj parametar može biti primjerice kakvo standardno odstupanje (ili njegova višestrukost) ili poluširina kojeg intervala s navedenom razinom povjerenja.

2. Mjerna nesigurnost sastoji se općenito od više sastavnica. Neke od tih sastavnica mogu se odrediti na temelju statističke razdiobe niza mjerenja i mogu se opisati eksperimentalnim standardnim odstupanjima. Druge sastavnice, koje se također mogu opisati standardnim odstupanjima, određuju se iz pretpostavljenih razdioba vjerojatnosti na temelju iskustva ili drugih podataka.

3. Podrazumijeva se da je mjerni rezultat najbolja procjena vrijednosti mjerene veličine i da sve sastavnice nesigurnosti (uključujući i one koje nastaju od sustavnih djelovanja, kao što su sastavnice pridružene ispravcima i referentnim etalonima) doprinose rasipanju.

[VIM:1993, definicija 3.9]

Objašnjenje *uputa*: U VIM-u se naglašava da su te definicije i napomene istovjetni određenjima i napomenama danim u ovim *uputama* (vidi podtočku 2.2.3).

B.2.19
mjerna pogrješka
mjerni rezultat manje istinita vrijednost mjerene veličine

NAPOMENE:

1. Kako se istinita vrijednost ne može odrediti, u praksi se upotrebljava dogovorena istinita vrijednost [vidi VIM:1993, definicije 1.19 (B.2.3) i 1.20 (B.2.4)].

2. Kad je potrebno razlikovati "pogrješku" od "relativne pogrješke", prva se katkad naziva **apsolutnom mjernom pogrješkom**; ne treba je brkati s **apsolutnom vrijednošću pogrješke koja je modul pogrješke**.

[VIM:1993, definicija 3.10]

Objašnjenje *uputa*: Ako mjerni rezultat ovisi o vrijednostima veličina koje su različite od mjerene veličine, pogrješke izmjerenih vrijednosti tih veličina doprinose pogrješci mjernog rezultata. Vidi također objašnjenje *uputa* uz definicije B.2.22 i B.2.3.

B.2.20
razmjerna pogrješka
mjerna pogrješka podijeljena s istinitom vrijednošću mjerene veličine

NAPOMENA:

Kako se istinita vrijednost ne može odrediti, u praksi se upotrebljava dogovorena istinita vrijednost [vidi VIM: definicije 1.1.9 (B.2.3) i 1.20 (B.2.4)].

[VIM:1993, definicija 3.12]

Objašnjenje *uputa*: Vidi objašnjenje *uputa* uz definiciju B.2.3.

B.2.21
slučajna pogrješka
mjerni rezultat manje srednja vrijednost koja bi proizišla iz beskonačnog broja mjerenja iste mjerene veličine izvedenih u uvjetima ponovljivosti

NAPOMENE:

1. Slučajna pogrješka jednako je pogrješka manje sustavna pogrješka.
2. Kako se može izvesti samo konačan broj mjerenja, moguće je odrediti samo procjenu slučajne pogrješke.

[VIM:1993, definicija 3.13]

Objašnjenje *uputa*: Vidi objašnjenje *uputa* uz definiciju B.2.22

B.2.22
sustavna pogrješka
srednja vrijednost koja bi proizišla iz beskonačnog broja mjerenja iste mjerene veličine izvedenih u uvjetima ponovljivosti manje istinita vrijednost mjerene veličine

NAPOMENE:

1. Sustavna pogrješka jednako je pogrješka manje slučajna pogrješka.
2. Kao ni istinita vrijednost ni sustavna pogrješka, a ni njezini uzroci ne mogu biti potpuno poznati.
3. Za mjerne instrumente vidi "sustavno odstupanje pokazivanja" (VIM:1993, definicija 5.25).

[VIM:1993, definicija 3.14]

Objašnjenje *uputa*: Za pogrješku mjernog rezultata (vidi definiciju B.2.19) može se često uzimati da potječe od niza slučajnih i sustavnih djelovanja koja pojedinačnim sastavnicama pogrješke doprinose pogrješci rezultata. Vidi također objašnjenje *uputa* uz definicije B.2.19 i B.2.3.

B.2.23
ispravak
vrijednost algebarski pribrojena neispravljenom mjernom rezultatu radi uklanjanja sustavne pogrješke

NAPOMENE:

1. Ispravak je jednak negativnoj vrijednosti procijenjene sustavne pogrješke.
2. Kako sustavna pogrješka ne može biti savršeno poznata, to uklanjanje ne može biti potpuno.

[VIM:1993, definicija 3.15]

B.2.24
faktor ispravka
brojčani faktor kojim se množi mjerni rezultat da bi se uklonila sustavna pogrješka

NAPOMENA: Kako sustavna pogrješka ne može biti savršeno poznata, to uklanjanje ne može biti potpuno.

[VIM:1993, definicija 3.16]

Dodatak C

Temeljni statistički nazivi i pojmovi

C.1 Izvor definicija

Definicije temeljnih statističkih naziva dane u ovome dodatku preuzete su iz međunarodne norme ISO 3534-1: 1993* [7]. To treba biti prvi izvor koji se uzima u obzir za definicije naziva koji nisu ovdje uključeni. Da bi se olakšala daljnja uporaba ovih *uputa*, neki od tih naziva i pojmova koji čine njihov sadržaj razrađeni su u C.3 slijedeći prikaz njihovih formalnih definicija u C.2. Međutim, točka C.3, koja također obuhvaća definicije nekih srodnih pojmova, ne temelji se izravno na normi ISO 3534-1:1993.

C.2 Definicije

Kao i u točki 0 i dodatku B uporaba zagrada oko određenih riječi znači da se te riječi mogu izostaviti ako nije vjerojatno da će to izazvati zabunu.

Nazivi od C.2.1 do C.2.14 određeni su na temelju svojstava populacije. Definicije naziva od C.2.15 do C.2.31 odnose se na skup opažanja (vidi [7]).

C.2.1
vjerojatnost
realan broj u rasponu od 0 do 1 pridružen kojemu slučajnom događaju

NAPOMENA: Ona se može povezati s dugoročnom relativnom čestoćom pojave ili stupnjem vjerovanja da će se koji događaj pojaviti. Za visok stupanj vjerovanja vjerojatnost je blizu 1.

[ISO 3534-1:1993, definicija 1.1]

C.2.2
slučajna varijabla; varijata
varijabla koja može poprimiti bilo koju od vrijednosti iz određenog skupa vrijednosti, a kojoj je pridružena kakva *razdioba vjerojatnosti* [ISO 3534-1:1993, definicija 1.3 (C.2.3)]

NAPOMENE:

1. Slučajna varijabla koja može poprimiti samo zasebne vrijednosti naziva se "diskretnom". Slučajna varijabla koja može poprimiti bilo koju vrijednost unutar konačnog ili beskonačnog intervala naziva se "neprekidnom".

2. Vjerojatnost događaja A označuje se s Pr(A) ili P(A).

[ISO 3534-1:1993, definicija 1.2]

Objašnjenje *uputa*: U ovim *uputama* umjesto znaka P_r(A)*,* koji se upotrebljava u normi ISO 3534-1:1993, upotrebljava se znak Pr(A).

---

* **Fusnota uz verziju iz 2008. godine:**

Norma ISO 3534-1:1993 povučena je i zamijenjena normom ISO 3534-1:2006. Napominjemo da su neki nazivi i definicije prerađeni. Za dodatnu obavijest vidi najnovije izdanje.

C.2.3
razdioba vjerojatnosti (slučajne varijable)
funkcija koja daje vjerojatnost da će slučajna varijabla poprimiti bilo koju danu vrijednost ili da pripada određenomu skupu vrijednosti.

NAPOMENA: Vjerojatnost slučajne varijable na cijelom skupu vrijednosti jednaka je 1.

[ISO 3534-1:1993, definicija 1.3]

C.2.4
funkcija razdiobe
funkcija koja za svaku vrijednost x daje vjerojatnost da će slučajna varijabla X biti manja ili jednaka x:

$$F(x) = \Pr(X \leq x)$$

[ISO 3534-1:1993, definicija 1.4]

C.2.5
funkcija gustoće vjerojatnosti (neprekidne slučajne varijable)
derivacija (kad ona postoji) funkcije razdiobe:

$$f(x) = \mathrm{d}F(x)/\mathrm{d}x$$

NAPOMENA: $f(x)\mathrm{d}x$ je "element vjerojatnosti":

$$f(x)\mathrm{d}x = \Pr(x < X < x + \mathrm{d}x)$$

[ISO 3534-1:1993, definicija 1.5]

C.2.6
funkcija vjerojatnosti mase
funkcija koja za svaku vrijednost x_i diskretne slučajne varijable X daje vjerojatnost p_i da će ta varijabla biti jednaka x_i:

$$p_i = \Pr(X = x_i)$$

[ISO 3534-1:1993, definicija 1.6]

C.2.7
parametar
veličina koja služi za opis razdiobe vjerojatnosti koje slučajne varijable

[ISO 3534-1:1993, definicija 1.12]

C.2.8
korelacija
odnos između dviju ili više varijabla u razdiobi dviju ili više slučajnih varijabla

NAPOMENA: Većina statističkih mjera korelacije mjeri se samo stupnjem linearnog odnosa.

[ISO 3534-1:1993, definicija 1.13]

C.2.9
očekivanje (slučajne varijable ili razdiobe vjerojatnosti);
očekivana vrijednost;
sredina

1. Za diskretnu slučajnu varijablu X koja poprima vrijednosti x_i s vjerojatnostima p_i očekivanje je, ako ono postoji, jednako:

   $$\mu = E(X) = \sum p_i x_i$$

   zbroju protegnutom na sve vrijednosti x_i koje X može poprimiti.
2. Za neprekidnu slučajnu varijablu X koja ima funkciju gustoće vjerojatnosti $f(x)$, očekivanje je, ak ono postoji, jednako

   $$\mu = E(X) = \int x f(x) \mathrm{d}x$$

   integralu protegnutom preko intervala promjene varijable X.

[ISO 3534-1:1993, definicija 1.18]

C.2.10
usredištena slučajna varijabla
slučajna varijabla čije je očekivanje jednako ništici

NAPOMENA: Ako slučajna varijabla X ima očekivanje μ, odgovarajuća usredištena slučajna varijabla je $(X - \mu)$.

[ISO 3534-1:1993, definicija 1.21]

C.2.11
varijancija (slučajne varijable ili razdiobe vjerojatnosti)
očekivanje kvadrata *usredištene slučajne varijable* [ISO 3534-1:1993, definicija 1.21 (C.2.10)]:

$$\sigma^2 = V(X) = E\{[X - E(X)]^2\}$$

[ISO 3534-1:1993, definicija 1.22]

C.2.12
standardno odstupanje (slučajne varijable ili razdiobe vjerojatnosti)
pozitivni drugi korijen varijancije:

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

[ISO 3534-1:1993, definicija 1.23]

C.2.13
središnji moment[2)] *q*-tog reda
u univarijantnoj razdiobi očekivanje q-te potencije usredištene slučajne varijable $(X - \mu)$:

$$E[(X - \mu)^q]$$

NAPOMENA: *Varijancija* [ISO 3534-1:1993, definicija 1.22 (C.2.1)] slučajne varijable X središnji je moment drugog reda.

[ISO 3534-1:1993, definicija 1.28]

---

2) Ako se, u definiciji momenata, veličine X, $X - a$, Y, $Y - b$ itd., zamijene njihovim apsolutnim vrijednostima, tj. s $|X|$, $|X - a|$, $|Y|$, $|Y - b|$ itd. definiraju se drugi momenti koji se nazivaju "apsolutnim momentima".

C.2.14
normalna razdioba
Gauss – Laplaceova razdioba
razdioba vjerojatnosti neprekidne slučajne varijable *X* čija je funkcija gustoće vjerojatnosti:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

za $-\infty < x < +\infty$.

NAPOMENA: μ je očekivanje, a σ standardno odstupanje normalne razdiobe

[ISO 3534-1:1993, definicija 1.37]

C.2.15
značajka
svojstvo koje pomaže u prepoznavanju ili razlikovanju elemenata dane populacije

NAPOMENA: Značajka može biti količinska (prema varijablama) ili kakvoćna (prema atributima).

[ISO 3534-1:1993, definicija 2.2]

C.2.16
populacija
ukupnost elemenata koji se razmatraju

NAPOMENA: U slučaju slučajne varijable smatra se da *razdioba vjerojatnosti* [ISO 3534-1:1993, definicija 1.3 (C2.3)] određuje populaciju te varijable.

[ISO 3534-1:1993, definicija 2.3]

C.2.17
čestoća
broj pojava određene vrste ili broj opažanja koja ulaze u specificirani razred

[ISO 3534-1:1993, definicija 2.11]

C.2.18
razdioba čestoća
iskustveni odnos između vrijednosti značajka i njihovih čestoća ili njihovih relativnih čestoća

NAPOMENA: Razdioba se može grafički predočiti *histogramom* (ISO 3534-1:1993, definicija 2.17), *stupčanim grafikonom* (ISO 3534-1:1993, definicija 2.18), *kumulativnim poligonom čestoća* (ISO 3534-1:1993, definicija 2.19) ili *dvostranom tablicom* (ISO 3534-1:1993, definicija 2.22).

[ISO 3534-1:1993, definicija 2.15]

C.2.19
aritmetička sredina; prosjek
zbroj vrijednosti podijeljen brojem tih vrijednosti

NAPOMENE:

1. Naziv "sredina" općenito se upotrebljava kad se odnosi na koji parametar populacije, a naziv "prosjek" kad se odnosi na rezultat izračuna podataka dobivenih iz uzorka.

2. Prosječna vrijednost kojeg jednostavnog slučajnog uzorka uzeta iz populacije nepristrani je procjenjivač srednje vrijednosti te populacije. Međutim, katkad se upotrebljavaju i drugi procjenjivači, kao što su geometrijske ili harmonijske sredine, medijane ili mode.

[ISO 3534-1:1993, definicija 2.26]

C.2.20
varijancija
mjera rasipanja koja je jednaka zbroju kvadrata odstupanja opažanja od njihove prosječne vrijednosti podijeljenom s brojem opažanja umanjenim za jedan

PRIMJER: Za n opažanja $x_1, x_2, ..., x_n$ s prosječnom vrijednošću

$$\bar{x} = (1/n)\sum x_i$$

varijancija je

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x_i - \bar{x})^2$$

NAPOMENE:

1. Varijancija uzorka nepristrani je procjenjivač populacijske varijancije.
2. Varijancija je jednaka središnjem momentu 2. reda pomnoženu s $n/(n-1)$ (vidi napomenu iz ISO 3534-1:1993, definicije 2.39).

[ISO 3534-1:1993, definicija 2.33]

Objašnjenje *uputa*: Varijanciju, kako je određena u ovim *uputama*, bilo bi mnogo prikladnije imenovati "uzorkovnom procjenom populacijske varijancije". Varijancija kojeg uzorka obično se određuje kao središnji moment drugog reda uzorka (vidi C.2.13 i C.2.22).

C.2.21
standardno odstupanje
pozitivni drugi korijen varijancije

NAPOMENA: Standardno odstupanje uzorka pristrani je procjenjivač standardnog odstupanja populacije.

[ISO 3534-1:1993, definicija 2.4]

C.2.22
središnji moment q-tog reda
u razdiobi pojedine značajke aritmetička sredina q-tih potencija razlike između opaženih vrijednosti i njihove prosječne vrijednosti $\bar{x}$:

$$\frac{1}{n}\sum_i (x_i - \bar{x})^q$$

gdje je n broj opažanja

NAPOMENA: Središnji moment prvog reda jednak je ništici.

[ISO 3534-1:1993, definicija 2.37]

C.2.23
statistika
funkcija slučajnih varijabla uzorka

NAPOMENA: Statistika kao funkcija slučajnih varijabla također je slučajna varijabla te od uzorka do uzorka poprima različite vrijednosti. Vrijednost statistike dobivena primjenom opažanjem dobivenih vrijednosti na tu funkciju može se upotrijebiti u statističkom testu (provjeri) ili kao procjena kojega populacijskog parametra, kao što je sredina ili standardno odstupanje.

[ISO 3534-1:1993, definicija 2.45]

C.2.24
procjenjivanje
postupak pridjeljivanja (iz opažanja u uzorku) brojčanih vrijednosti parametrima razdiobe izabrane kao statistički model populacije iz koje je uzet taj uzorak

NAPOMENA: Rezultat tog postupka može biti izražen kao pojedinačna vrijednost [točkovna procjena: vidi ISO 3534-1:1993, definiciju 2.51 (C.2.26)] ili kao intervalna procjena [vidi ISO 3534-1:1993, definicije 2.57 (C.2.26) i 2.58 (C.2.28)].

[ISO 3534-1:1993, definicija 2.49]

C.2.25
procjenjivač
statistika koja se upotrebljava za procjenu kojeg populacijskog parametra

[ISO 3534-1:1993, definicija 2.50]

C.2.26
procjena
vrijednost procjenjivača koja se dobiva kao rezultat procjenjivanja

[ISO 3534-1:1993, definicija 2.51]

C.2.27
dvostrani interval povjerenja
kad je θ parametar populacije koji treba procijeniti i kad su T_1 i T_2, dvije funkcije opažanjem dobivenih vrijednosti, takve da je vjerojatnost $\Pr(T_1 \leq \theta \leq T_2)$ jednaka najmanje $(1 - \alpha)$ [gdje je $(1 - \alpha)$ nepromjenjiv broj, pozitivan i manji od 1], interval između T_1 i T_2 dvostrani je $(1 - \alpha)$ interval povjerenja za θ

NAPOMENE:

1. Granice T_1 i T_2 intervala povjerenja *statistike* su [vidi ISO 3534-1:1993, definiciju 2.45 (C.2.23)] i zbog toga će općenito od uzorka do uzorka poprimati različite vrijednosti.

2. U dugim nizovima uzoraka razmjena čestoća slučajeva u kojima interval povjerenja pokriva istinitu vrijednost parametra populacije θ veća je od ili jednaka $(1 - \alpha)$.

[ISO 3534-1:1993, definicija 2.57]

C.2.28
jednostrani interval povjerenja
kad je θ parametar populacije koji treba procijeniti, a T, funkcija opaženih vrijednosti, takva da je vjerojatnost $\Pr(T \geq \theta)$ [ili vjerojatnost $\Pr(T \leq \theta)$] barem jednaka $(1 - \alpha)$ [gdje je $(1 - \alpha)$ nepromjenjiv broj, pozitivan i manji od 1], interval od najmanje moguće vrijednosti parametra θ do T (ili interval od T do najveće moguće vrijednosti parametra θ) jednostrani je $(1 - \alpha)$ interval povjerenja za θ

NAPOMENE:

1. Granica je T intervala povjerenja *statistika* [vidi ISO 3534-1:1993, definiciju 2.45 (C.2.23)] i zbog toga će općenito od uzorka do uzorka poprimati različite vrijednosti.

2. Vidi napomenu 2. u normi ISO 3534-1:1993, definiciji 2.57 (C.2.27).

[ISO 3534-1:1993, definicija 2.58]

C.2.29
koeficijent povjerenja
razina povjerenja
vrijednost vjerojatnosti $(1 - \alpha)$ pridružena intervalu povjerenja ili statističkom intervalu pokrivanja. [Vidi normu ISO 3534-1:1993, definicije 2.57 (C.227), 2.58 (C.2.28) i 2.61 (C.2.30).]

NAPOMENA: $(1 - \alpha)$ često se izražava kao postotak.

[ISO 3534-1:1993, definicija 2.59]

C.2.30
statistički interval pokrivanja
interval za koji se s danom razinom povjerenja može tvrditi da najmanje sadržava specificirani udio populacije

NAPOMENE:

1. Kad su obje granice određene statistikama, taj interval je dvostran. Kad jedna od dviju granica nije konačna ili se sastoji od granica varijabla, taj je interval dvostran.

2. Naziva se također "statističkim intervalom tolerancije". Taj naziv ne bi se trebao upotrebljavati jer može izazvati brkanje s "intervalom tolerancije", koji je određen u normi ISO 3534-2:1993.

[ISO 3534-1:1993, definicija 2.61]

C.2.31
broj stupnjeva slobode
općenito broj članova u zbroju manje broj veza članova tog zbroja

[ISO 3534-1:1993, definicija 2.85]

C.3 Razradba naziva i pojmova

C.3.1 Očekivanje

Očekivanje funkcije $g(z)$ preko funkcije gustoće vjerojatnosti $p(z)$ slučajne varijable z određuje se izrazom:

$$E[g(z)] = \int g(z)p(z)\,\mathrm{d}z$$

gdje je z određena $p(z)$, $\int p(z)\,\mathrm{d}z = 1$. Očekivanje slučajne varijable z, koje se označuje s μ_z, a također se naziva očekivanom vrijednošću ili sredinom (srednjom vrijednošću) varijable z dano je izrazom:

$$\mu_2 \equiv E(z) = \int z p(z)\,\mathrm{d}z$$

Ono se statistički procjenjuje sa $\bar{z}$, aritmetičkom vrijednošću ili prosjekom n neovisnih opažanja z_i slučajne varijable z, čija je funkcija gustoće vjerojatnosti jednaka $p(z)$:

$$\bar{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i$$

C.3.2 Varijancija

Varijancija slučajne varijable očekivanje je njezina kvadratnog odstupanja oko njezina očekivanja. Prema tomu, varijancija slučajne varijable z s funkcijom gustoće vjerojatnosti $p(z)$ dana je izrazom:

$$\sigma^2(z) = \int (z - \mu_z)^2 p(z)\,\mathrm{d}z$$

gdje je μ_z očekivanje varijable z. Varijancija $\sigma^2(z)$ može se procijeniti s pomoću izraza:

$$s^2(z_i) = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(z_i - \bar{z})^2$$

gdje je:

$$\bar{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i$$

a z_i su n neovisnih opažanja varijable z.

NAPOMENE:

1. Faktor $n-1$ u izrazu za $s^2(z_i)$ potječe od korelacije između z_i i $\bar{z}$ i odražava činjenicu da u skupu $\{z_i - \bar{z}\}$ postoji samo $n-1$ neovisnih elemenata.

2. Ako je očekivanje μ_z poznato, varijancija se može procijeniti izrazom

$$s^2(z_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \mu_z)^2$$

Varijancija aritmetičke sredine ili presjeka opažanja, a ne varijancija pojedinačnih opažanja, prava je mjera nesigurnosti mjernog rezultata. Varijancija koje varijable z trebala bi se pažljivo razlikovati od varijancije srednje vrijednosti $\bar{z}$. Varijancija aritmetičke sredine niza n neovisnih opažanja z_i varijable z dana je izrazom $\sigma^2(\bar{z}) = \sigma^2(z_i)/n$, a procjenjuje se eksperimentalnom varijancijom srednje vrijednosti

$$s^2(\bar{z}) = \frac{s^2(z_i)}{n} = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})^2$$

C.3.3 Standardno odstupanje

Standardno je odstupanje pozitivni drugi korijen varijancije. U slučaju kad je standardna nesigurnost A-vrste dobivena iz drugog korijena statistički izračunane varijancije, često je prikladnije da se, kad se određuje standardna nesigurnost B-vrste, prvo određuju nestatističkim ekvivalentom standardnog odstupanja i nakon toga se dobiva ekvivalentna varijancija kao drugi korijen standardnog odstupanja.

C.3.4 Kovarijancija

Kovarijancija dviju slučajnih varijabla mjera je njihove međusobne ovisnosti. Kovarijancija slučajnih varijabla y i z određuje se izrazom:

$$\mathrm{cov}(y, z) = \mathrm{cov}(z, y) = E\{[y - E(y)][z - E(z)]\}$$

što vodi na:

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(y, z) &= \mathrm{cov}(z, y)\\ &= \int\int(y-\mu_y)(z-\mu_z)p(y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ &= \int\int yzp(y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - \mu_y\mu_z\end{aligned}$$

gdje je $p(y, z)$ skupna funkcija gustoće vjerojatnosti dviju varijabla y i z. Kovarijancije $\mathrm{cov}(y, z)$ [također se označuje kao $v(y, z)$] mogu se procjenjivati s pomoću $s(y_i, z_i)$ dobivenih iz n neovisnih parova istodobnih opažanja y_i i z_i veličina y i z:

$$s(y_i, z_i) = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(y_j - \bar{y})(z_j - \bar{z})$$

gdje je

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

i

$$\bar{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i$$

NAPOMENA: Procijenjene kovarijancije tih dviju srednjih vrijednosti $\bar{y}$ i $\bar{z}$ daju se sa $s(\bar{z}, \bar{y}) = s(y_i, z_i)/n$.

C.3.5 Kovarijancijska matrica

Za razdiobu vjerojatnosti s više varijabla matrica $\boldsymbol{V}$ s elementima jednakim varijancijama i kovarijancijama tih varijabla naziva se kovarijancijskom matricom. Dijagonalni su elementi kovarijancijske matrice $v(z, z) \equiv \sigma^2(z)$ ili $s(z_i, z_i) \equiv s^2(z_i)$ varijancije, a njezini su izvandijagonalni elementi $v(y, z)$ ili $s(y_i, z_i)$ kovarijancije.

C.3.6 Koeficijent korelacije

Koeficijent korelacije razmjerna je mjera međuovisnosti dviju varijabla, jednaka omjeru njihovih kovarijancija i drugog korijena umnoška njihovih varijancija. Prema tomu je:

$$\rho(y, z) = \rho(z, y) = \frac{v(y,z)}{\sqrt{v(y,y)v(z,z)}} = \frac{v(y,z)}{\sigma(y)\sigma(z)}$$

s procjenama:

$$r(y_i, z_i) = r(z_i, y_i) = \frac{s(y_i, z_i)}{\sqrt{s(y_i, y_i)s(z_i, z_i)}} = \frac{s(y_i, z_i)}{s(y_i)\, s(z_i)}$$

Korelacijski je koeficijent čist broj, takav da je $-1 \leq \rho \leq +1$ ili $-1 \leq r(y_i, z_i) \leq + 1$.

NAPOMENE:

1. Budući da su ρ i r čisti brojevi u području –1 do +1 uključivo, dok su kovarijancije obično veličine s neprikladnim fizičkim dimenzijama i velikoćama, korelacijski su koeficijenti općenito korisniji nego kovarijancije.

2. Za razdiobu vjerojatnosti s više varijanata umjesto kovarijancijske matrice obično se daje matrični koeficijent korelacije. Kako je $\rho(y, y) = 1$ i $r(y_i, y_i) = 1$, dijagonalni elementi te matrice jednaki su jedinici.

3. Ako su ulazne veličine x_i i x_j korelirane (vidi podtočku 5.2.2) i ako koja promjena δ_i u x_i daje kakvu promjenu δ_j u x_j, tada se koeficijent korelacije pridružen x_i u x_j procjenjuje približno s

$$r(x_i, x_j) \approx u(x_i)\delta_j/[u(x_j)\delta_i]$$

Taj odnos može poslužiti kao temelj za eksperimentalnu procjenu koeficijenta korelacije. On se također može upotrijebiti za izračunavanje približne promjene jedne procjene ulazne veličine zbog promjene druge ako je poznat koeficijent korelacije.

C.3.7 Neovisnost

Dvije varijable statistički su neovisne ako je njihova skupna razdioba jednaka umnošku njihovih pojedinačnih razdioba vjerojatnosti.

NAPOMENA: Ako su dvije slučajne varijable neovisne, njihova kovarijancija i koeficijent korelacije jednaki su ništici, ali suprotno nije nužno istinito.

C.3.8 *t*-razdioba; Studentova razdioba

Studentova ili t-razdioba razdioba je vjerojatnosti neprekidne slučajne varijable t, čija je funkcija gustoće vjerojatnosti jednaka:

$$p(t, \nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}, \quad -\infty < t < +\infty$$

gdje je Γ gama funkcija, a $\nu > 0$. Očekivanje t-razdiobe jednako je ništici, a njezina varijancija jednaka je $\nu/(\nu - 2)$ za $\nu > 2$. Kad je $\nu \rightarrow \infty$, t-razdioba se približuje normalnoj razdiobi s $\mu = 0$ i $\sigma = 1$ (vidi definiciju C.2.14).

Ako je slučajna varijabla z normalno raspodijeljena s očekivanjem μ_z, tada je razdioba vjerojatnosti varijable $(\bar{z} - \mu_z)/s(\bar{z})$, gdje je $\bar{z}$ aritmetička sredina od n neovisnih opažanja z_i veličine z, $s(z_i)$ eksperimentalno standardno odstupanje tih n opažanja, a $s(\bar{z}) = s(z_i)/\sqrt{n}$ eksperimentalno standardno odstupanje srednje vrijednosti $\bar{z}$, t-razdioba s $\nu = n - 1$ stupnjeva slobode.

Dodatak D

"Istinita" vrijednost, pogrješka i nesigurnost

Naziv **istinita vrijednost** (B.2.3) tradicionalno se upotrebljava u publikacijama o nesigurnosti, ali, iz razloga izloženih u ovom dodatku, ne i u ovim *uputama*. Budući da se nazivi "mjerena veličina", "pogrješka" i "nesigurnost" često pogrješno razumijevaju, u ovom se dodatku, kao dopunu onomu što je rečeno u točki 3, dodatno raspravlja o pojmovima koji čine njihovu pozadinu. Za ilustraciju toga zašto se u ovim *uputama* prihvaćeni pojam nesigurnosti temelji na mjernim rezultatima i njihovoj procijenjenoj nesigurnosti, a ne na neutvrdivim veličinama kao što su "istinita" vrijednost i pogrješka, prikazane su dvije slike.

D.1 Mjerena veličina

D.1.1 Prvi korak u obavljanju mjerenja točno je definicija mjerene veličine – veličine koju treba mjeriti; mjerena se veličina ne može specificirati jednom vrijednošću nego samo opisom veličine. Međutim, načelno se mjerena veličina ne može *potpuno* opisati konačnim brojem podataka. Dakle, u mjeri u kojoj se ostavlja prostora za tumačenje, nepotpuna definicija mjerene veličine unosi u nesigurnost mjernog rezultata sastavnicu nesigurnosti koja može, ali ne mora biti značajna u odnosu na točnost koja se zahtijeva od tog mjerenja.

D.1.2 Općenito, definicija mjerene veličine točno utvrđuje određena fizička stanja i uvjete.

PRIMJER: Brzina zvuka u suhom zraku sastava (molni udio) N_2 = 0,780 8, O_2 = 0,209 5, Ar = 0,009 35 i CO_2 = 0,000 35 na temperaturi T = 273,15 K i tlaku p = 101 325 Pa.

D.2 Ostvarena veličina

D.2.1 Veličina ostvarena za mjerenje trebala bi u najboljem slučaju biti potpuno spojiva s definicijom mjerene veličine. Često se, međutim, takva veličina ne može ostvariti, pa se mjerenje provodi na veličini koja je aproksimacija mjerene veličine.

D.3 "Istinita" vrijednost i ispravljena vrijednost

D.3.1 Da bi se predvidjelo što bi bio mjerni rezultat kad bi ostvarena veličina stvarno potpuno zadovoljavala definiciju mjerene veličine, mjerni se rezultat ostvarene veličine ispravlja za razliku između te veličine i mjerene veličine. Mjerni rezultat ostvarene veličine također se ispravlja i za sva druga opažena značajna sustavna djelovanja. Premda se konačni ispravljeni rezultat katkad smatra najboljom procjenom "istinite" vrijednosti mjerene veličine, u stvarnosti taj je rezultat jednostavno najbolja procjena vrijednosti veličine koju se namjeravalo mjeriti.

D.3.2 Pretpostavimo npr. da je mjerena veličina debljina ploče određenoga gradiva kod specificirane temperature. Taj uzorak dovodi se na temperaturu blisku specificiranoj, a njegova se debljina na posebnom mjestu mjeri mikrometrom. Ostvarena je veličina debljina gradiva na tom mjestu pri toj temperaturi pod tlakom koji proizvodi mikrometar.

D.3.3 Za vrijeme mjerenja određuju se temperatura gradiva i primijenjeni tlak. Uzimanjem u račun krivulje umjeravanja mikrometra, neispravljeni rezultat mjerenja ostvarene veličine tada se ispravlja za odstupanje temperature uzorka od specificirane temperature i blago stiskanje uzorka pod primijenjenim tlakom.

D.3.4 Ispravljeni rezultat može se nazvati najboljom procjenom "istinite" vrijednosti, "istinite" u smislu da je to vrijednost veličine za koju se vjeruje da potpuno zadovoljava definiciju mjerene veličine. Ali kad bi se mikrometar primijenio na različite dijelove ploče, ostvarena bi veličina bila drukčija, s drukčijom "istinitom" vrijednošću. Međutim, ta "istinita" vrijednost bila bi podudarna s definicijam mjerene veličine jer se njome ne specificira da bi ta debljina trebala biti izmjerena na nekom posebnom mjestu na ploči. Dakle, u ovom slučaju, zbog nepotpune definicije mjerene veličine, "istinita" vrijednost ima nesigurnost koja se može odrediti iz mjerenja provedenih na različitim mjestima na ploči. Na nekoj razini svaka mjerena veličina ima takvu "svojstvenu" nesigurnost koja se načelno na određeni način može procijeniti. To je najmanja nesigurnost s kojom se može odrediti mjerena veličina, pa se svako mjerenje kojim se postiže takva nesigurnost može smatrati najboljim mogućim mjerenjem te mjerene veličine. Da bi se dobila vrijednost veličine o kojoj je riječ s manjom mjernom nesigurnošću, zahtijeva se da ta mjerena veličina bude potpunije definirana.

NAPOMENE:

1. Npr., specifikacija mjerene veličine ostavlja mnogo drugih spornih pitanja za koje bi se moglo smatrati da utječu na debljinu: barometarski tlak, vlažnost, položaj ploče u gravitacijskom polju, način na koji je oslonjena itd.

2. Premda bi se mjerena veličina trebala definirati dostatno iscrpno da svaka nesigurnost koja potječe od njezine nepotpune definicije bude zanemariva, mora se priznati da to nije uvijek praktično moguće. Ta definicija može npr. biti nepotpuna jer ne specificira parametre za koje se neopravdano može pretpostavljati da imaju zanemarivo djelovanje; ili se mogu podrazumijevati uvjeti koji nikad ne mogu biti potpuno ispunjeni i čije je nesavršeno ostvarenje teško uzeti u obzir. Npr. u primjeru iz podtočke D.1.2, brzina zvuka podrazumijeva beskonačne ravninske valove iščezavajuće male amplitude. U opsegu u kojem mjerenje ne zadovoljava te uvjete trebaju se uzeti u obzir ogib i djelovanje nelinearnosti.

3. Neprikladna specifikacija mjerene veličine može dovesti do razlika među rezultatima mjerenja dokazivo iste kakvoće provedenih u različitim laboratorijima.

D.3.5 Naziv "istinita vrijednost mjerene veličine" ili veličine (često se kratko izgovara "istinita vrijednost") izbjegava se u ovim uputama jer se riječ "istinita" smatra suvišnom. "Mjerena veličina" (vidi definiciju B.2.9) označuje "posebnu veličinu podvrgnutu mjerenju", prema tomu, "vrijednost mjerene veličine" znači "vrijednost koje posebne veličine podvrgnute mjerenju". Budući da se općenito smatra da "posebna veličina" znači konačnu ili specificiranu veličinu (vidi definiciju B.2.1, napomenu 1.), pridjev je "istinita" u izrazu "istinita vrijednost mjerene veličine" (ili u izrazu "istinita vrijednost veličine") nepotreban – "istinita" vrijednost mjerene veličine (ili veličine) jednostavno je vrijednost te mjerene veličine (ili veličine). Osim toga, kako je naprijed pokazano, nedostižna "istinita" vrijednost samo je idealiziran pojam.

D.4 Pogrješka

Ispravljeni mjerni rezultat nije vrijednost mjerene veličine, tj. u njem je sadržana pogrješka zbog nesavršenog mjerenja ostvarene veličine izazvanog slučajnim promjenama opažanja (slučajnim djelovanjima), neodgovarajućim određivanjem ispravaka zbog sustavnih djelovanja i nepotpunim poznavanjem određenih fizičkih pojava (također sustavna djelovanja). Ni vrijednost ostvarene veličine ni vrijednost mjerene veličine ne mogu se nikad točno znati; sve što se može znati njihove su procijenjene vrijednosti. U navedenom primjeru mjerena debljina ploče *može* biti pogrješna, tj. može se razlikovati od vrijednosti mjerene veličine (debljina ploče) budući da svako od ovih djelovanja može doprinijeti nepoznatoj pogrješci mjernog rezultata:

a) male razlike između pokazivanja mikrometra kad se on opetovano primjenjuje na istu ostvarenu veličinu

b) nesavršeno umjeravanje mikrometra

c) nesavršeno mjerenje temperature i primijenjena tlaka

d) nepotpuno poznavanje djelovanja temperature, barometarskoga tlaka i vlažnosti na uzorak ili mikrometar, ili i jedno i drugo.

D.5 Nesigurnost

D.5.1 Bez obzira na to što su točne vrijednosti tih doprinosa pogrješci mjernog rezultata nepoznate i neutvrdive, mogu se odrediti *nesigurnosti* pridružene slučajnim i sustavnim djelovanjima koja uzrokuju pogrješku. Ali, čak i ako su procijenjene nesigurnosti malene, još uvijek ne postoji jamstvo da je i pogrješka mjernog rezultata malena; pri određivanju ispravka ili procjenjivanju nepotpunog poznavanja može se previdjeti sustavno djelovanje jer nije otkriveno. Prema tomu, nesigurnost mjernog rezultata nije nužno pokazatelj vjerojatnosti da je taj mjerni rezultat blizu vrijednosti mjerene veličine, ona je jednostavno procjena vjerojatnosti blizine najbolje vrijednosti koja je u skladu sa sada raspoloživim znanjem.

D.5.2 Mjerna je nesigurnost dakle izraz činjenice da za određenu mjerenu veličinu ili njezin mjerni rezultat ne postoji jedna vrijednost nego beskonačan broj vrijednosti raspršenih oko tog rezultata, koje su sukladne sa svim opažanjima i podatcima i opažateljevim poznavanjem fizičkog svijeta te da se one s promjenljivim stupnjevima uvjerljivosti mogu pridijeliti toj mjerenoj veličini.

D.5.3 Nasreću, u mnogim praktičnim mjernim situacijama ne primjenjuje se veći dio teksta ovog dodatka. Slučajevi kad su etaloni i instrumenti umjereni uporabom dobro poznatih referentnih etalona koji su sljedivi prema državnim etalonima i kad su nesigurnosti ispravaka umjeravanja etalona nevažne u odnosu na nesigurnosti koje nastaju zbog slučajnih djelovanja na pokazivanja instrumenata ili zbog ograničenog broja opažanja primjeri su gdje je mjerena veličina na primjeren način određena (vidi podtočku E.4.3). Ipak, nepotpuno poznavanje utjecajnih veličina i njihovih djelovanja može često znatno doprinositi nesigurnosti mjernih rezultata.

D.6 Grafički prikaz

D.6.1 Slika D.1 ocrtava neke od ideja o kojima se raspravljalo u točki 3 ovih *uputa* i u ovom dodatku. Ona pokazuje zašto je težište ovih *uputa* na nesigurnosti, a ne na pogrješci. Točna pogrješka mjernog rezultata općenito je nepoznata i neutvrdiva. Sve što se može učiniti jest iz nepoznatih razdioba vjerojatnosti iz kojih se uzimaju uzorci opetovanim opažanjima ili iz subjektivnih ili *apriornih* razdioba koje se temelje na sveukupnim raspoloživim podatcima procijeniti vrijednosti ulaznih veličina, uključujući ispravke zbog utvrđenih sustavnih djelovanja zajedno s njihovim standardnim nesigurnostima (procijenjenim standardnim odstupanjima) i nakon toga izračunati mjerni rezultat iz procijenjenih vrijednosti ulaznih veličina i sastavljenu standardnu nesigurnost tog rezultata iz standardnih nesigurnosti tih procijenjenih vrijednosti. Samo ako postoji čvrst temelj za vjerovanje da je sve to ispravno napravljeno, bez predviđenih znatnih sustavnih djelovanja, može se pretpostaviti da je mjerni rezultat pouzdana procjena dobivene vrijednosti mjerene veličine te da je njegova sastavljena standardna nesigurnost pouzdana mjera njegove *moguće* pogrješke.

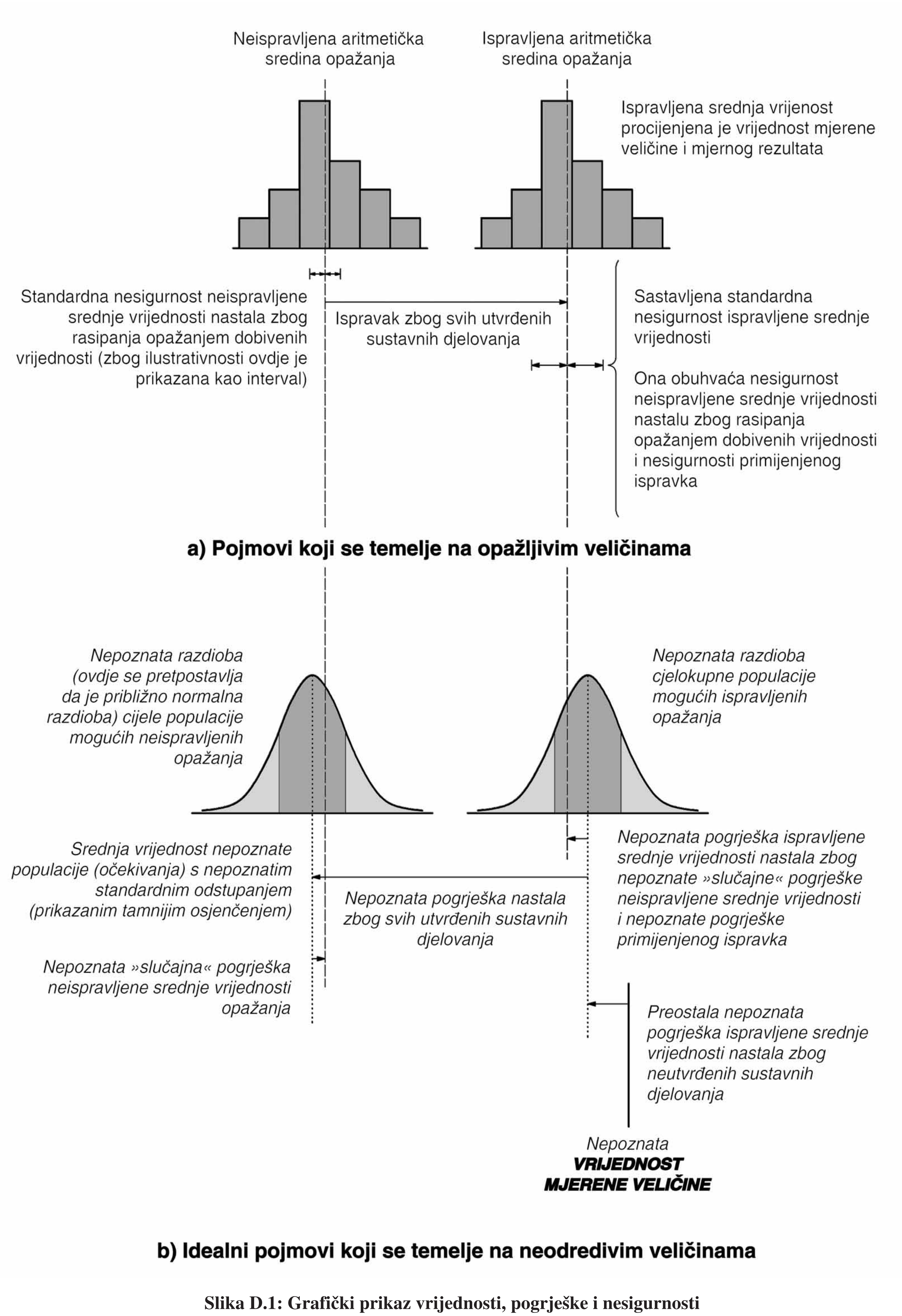
NAPOMENE:

1. Na slici D.1a opažanja su zbog zornosti prikazana histogramom (vidi podtočku 4.4.3 i sliku 1b).

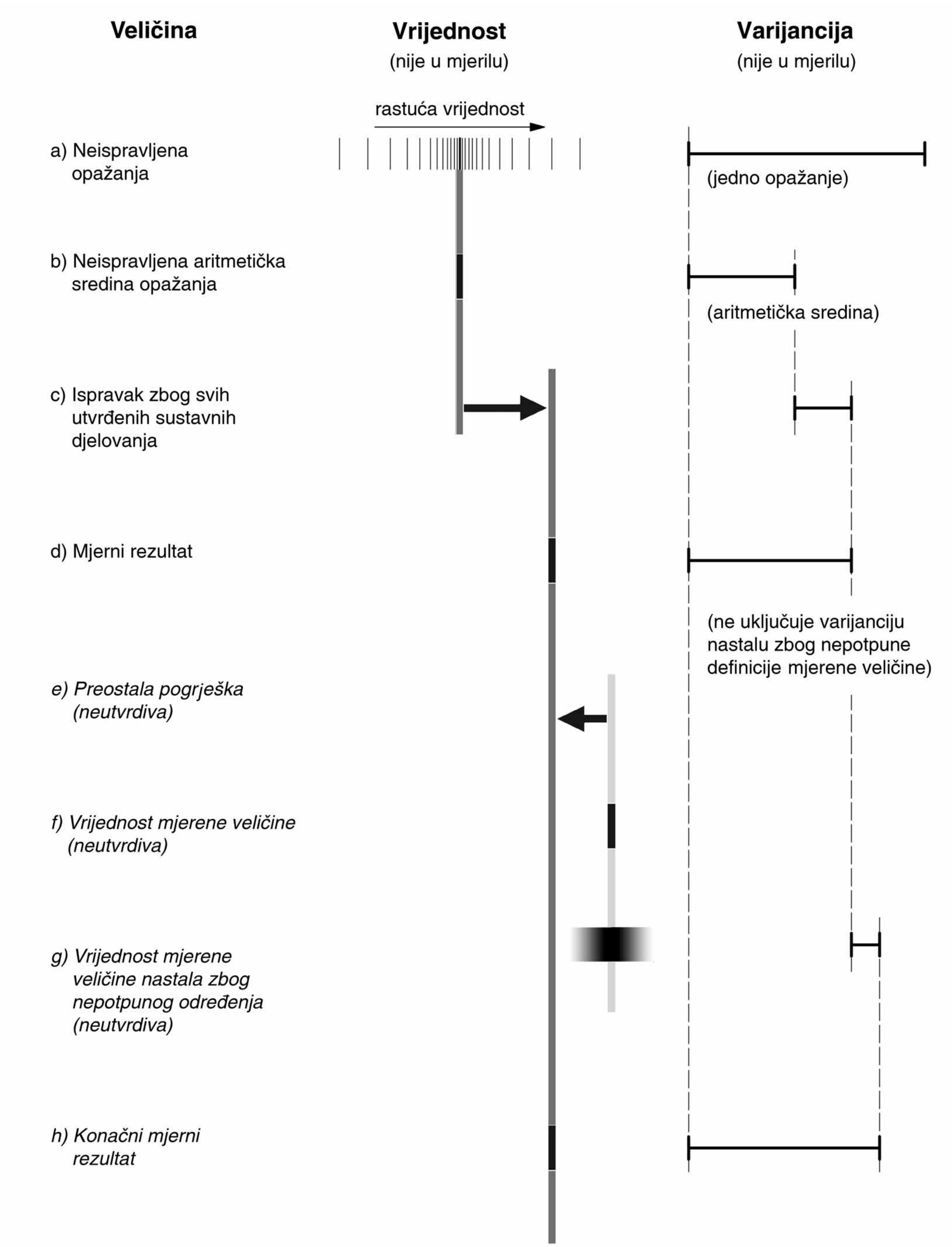
2. Ispravak pogrješke jednak je negativnoj procjeni pogrješke. Prema tomu, na slici D.1, a također i na slici D.2 strelica koja prikazuje ispravak zbog pogrješke jednaka je po duljini strelici koja bi prikazivala samu pogrješku, ali ima suprotan smjer od nje i obrnuto. Tekstualna objašnjenja uz sliku objašnjavaju pokazuje li pojedina strelica ispravak pogrješke.

D.6.2 Slika D.2 zorno prikazuje neke od pojmova prikazanih na slici D.1, ali na različit način. Osim toga, ona također zorno prikazuje ideju da može postojati mnogo vrijednosti mjerene veličine ako je definicija mjerene veličine nepotpuna [natuknica g) uz sliku D.2]. Nesigurnost koja potječe od nepotpunosti definicije mjerene varijancijom određuje se iz mjerenja mnogih ostvarenja te mjerene velične uporabom iste metode, istog instrumenta itd. (vidi podtočku D.3.4).

NAPOMENA: U stupcu pod naslovom "varijancija" pod varijancijama se razumijevaju varijancije $u_i^2(y)$ definirane u jednadžbi (11a) u podtočki 5.1.3; prema tomu, one se pribrajaju linearno, kako je prikazano.



Slika D.1: Grafički prikaz vrijednosti, pogrješke i nesigurnosti



Slika D.2: Grafički prikaz vrijednosti, pogrješke i nesigurnosti

Dodatak E

Povod i temelj za Preporuku INC-1 (1980)

U ovom se dodatku ukratko raspravlja o poticajnom razlogu i statističkim osnovama za izradbu Preporuke INC-1 (1980) radne skupine za iskazivanje nesigurnosti na kojoj počivaju ove *upute*. Za dodatne obavijesti vidi uputnice [1, 2, 11, 12].

E.1 "Siguran", "slučajan" i "sustavan"

E.1.1 Ove *upute* izlažu široko primjenjivu metodu za određivanje i izražavanje mjerne nesigurnosti. Na temelju shvaćanja da ne postoji bitna razlika između sastavnice nesigurnosti koja potječe od slučajnih djelovanja i sastavnice nesigurnosti koja potječe od ispravaka zbog sustavnih djelovanja (vidi podtočke 3.2.2 i 3.2.3), ta metoda daje ostvarivu, a ne "sigurnu" vrijednost nesigurnosti. Ta je metoda, prema tomu, u suprotnosti s određenim starijim metodama jer ima ove dvije zamisli u zajedničkoj uporabi:

E.1.2 Prva se zamisao sastoji u tome da iskazana nesigurnost treba biti "sigurna" ili "konzervativna", što znači da se ona nikad ne smije snižavati. U stvari, zbog neizvjesnosti određivanja nesigurnosti mjernog rezultata ona se često namjerno povećava.

E.1.3 Druga se zamisao sastoji u tome da utjecaji koji uzrokuju mjernu nesigurnost budu uvijek prepoznatljivi kao "slučajni" ili "sustavni" zbog različite naravi njihova nastanka; nesigurnosti pridružene svakom od njih trebale bi se sastavljati posebno i odvojeno iskazivati (ili kad se zahtijeva jedna brojčana vrijednost, sastavljati na specificiran način). U stvari, metoda sastavljanja nesigurnosti često se birala tako da zadovoljava taj zahtjev sigurnosti.

E.2 Opravdanje za realistična određivanja nesigurnosti

E.2.1 Kad se iskazuje vrijednost mjerene veličine, moraju se dati najbolja procjena njezine vrijednosti i najbolja procjena nesigurnosti te procjene, jer ako je ta nesigurnost pogrješna normalno bi bilo nemoguće odabrati u kojem bi smislu ona trebala biti pogrješna "bez štetnih posljedica". Umanjen iskaz nesigurnosti mogao bi izazvati previše povjerenja u iskazane vrijednosti, s katkad nepriličnim ili čak katastrofalnim posljedicama. Namjerno preuveličan iskaz nesigurnosti mogao bi također imati neželjene posljedice. Mogao bi navesti korisnike mjerne opreme da kupuju mnogo skuplje mjerne instrumente nego što je potrebno ili dati povod da se skupi proizvodi nepotrebno odbace ili odbiju usluge kojeg laboratorija za umjeravanje.

E.2.2 Time se ne želi reći da oni koji upotrebljavaju mjerne rezultate ne mogu primjenjivati vlastiti množidbeni faktor na svoju iskazanu nesigurnost kako bi dobili povećanu nesigurnost koja određuje interval koji ima specificiranu razinu povjerenja i koja zadovoljava njihove vlastite potrebe ili da u određenim okolnostima ustanove koje daju mjerne rezultate ne mogu na uobičajen način primjenjivati faktor koji daje sličnu povećanu nesigurnost koja zadovoljava potrebe posebnog razreda korisnika njihovih rezultata. Međutim, takvi faktori (koji se uvijek trebaju navoditi) moraju se primjenjivati na nesigurnost određenu realističnom metodom, i to samo *nakon* što je nesigurnost tako određena, tako da interval određen povećanom nesigurnošću ima zahtijevanu razinu povjerenja, te da se taj postupak može lako provesti obrnutim redom.

E.2.3 Oni koji se bave mjerenjem često moraju u svoje analize uključiti i mjerne rezultate drugih mjeritelja, gdje svaki od tih drugih rezultata ima svoju vlastitu nesigurnost. U izračunu svojih vlastitih mjernih rezultata oni moraju imati kakvu najbolju vrijednost, a ne "sigurnu" vrijednost nesigurnosti svakog od rezultata uključenih iz drugih izvora. Osim toga, mora postojati smislen i jednostavan postupak kojim se te unesene nesigurnosti mogu sastavljati s nesigurnostima njihovih vlastitih opažanja da bi dale nesigurnost njihova vlastitog rezultata. Preporuka INC-1 (1980) osigurava takav postupak.

E.3 Opravdanje za istovjetnu obradbu svih sastavnica nesigurnosti

Težište je rasprave ove podtočke jednostavan primjer koji zorno pokazuje kako u određivanju nesigurnosti mjernog rezultata ove *upute* točno na isti način obrađuju sastavnice nesigurnosti koje nastaju zbog slučajnih djelovanja i sastavnice nesigurnosti koje potječu od ispravaka zbog sustavnih djelovanja. Tim se primjerom dokazuje gledište prihvaćeno u ovim *uputama* i navedeno u podtočki E.1.1, tj. da su sve sastavnice nesigurnosti iste prirode i da se trebaju obrađivati na istovjetan način. Polazna je točka ove rasprave pojednostavljen izvod matematičkog izraza za prijenos standardnih odstupanja, koji se u ovim *uputama* naziva zakonom prijenosa nesigurnosti.

E.3.1 Neka izlazna veličina $Z = f(w_1, w_2, ..., w_N)$ ovisi o N ulaznih veličina $w_1, w_2, ..., w_N$, pri čemu je svaka veličina w_i opisana odgovarajućom razdiobom vjerojatnosti. Razvoj funkcije f oko očekivanja $E(w_i) \equiv \mu_i$ veličina w_i u Taylorov red do članova prvog reda daje za mala odstupanja veličine z od μ_z izražena s pomoću malih odstupanja veličina w_i od μ_i izraz:

$$z - \mu_z = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial w_i} (w_i - \mu_i) \tag{E.1}$$

pri čemu se pretpostavlja da se članovi višeg reda (u razvoju funkcije f) mogu zanemariti te da je $\mu_z = f(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_N)$. Kvadrat odstupanja $z - \mu_z$ dan je tada izrazom:

$$(z - \mu_z)^2 = \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial w_i} (w_i - \mu_i) \right)^2 \tag{E.2a}$$

što se može napisati kao:

$$(z - \mu_z)^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial w_i} \right)^2 (w_i - \mu_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial w_i} \frac{\partial f}{\partial w_j} (w_i - \mu_i)(w_j - \mu_j) \tag{E.2b}$$

Očekivanje kvadratnog odstupanja $(z - \mu_z)^2$ varijancija je veličine z, tj. $E[(z - \mu_z)^2] = \sigma_z^2$ i, prema tomu, iz jednadžbe (E.2b) dobivamo:

$$\sigma_z^2 = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial w_i} \right)^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial w_i} \frac{\partial f}{\partial w_j} \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \tag{E.3}$$

U tom je izrazu $\sigma_i^2 = E[(w_i - \mu_i)^2]$ varijancija veličine w_i, a $\rho_{ij} = \upsilon(w_i, w_j)/(\sigma_i^2 \sigma_j^2)^{1/2}$ koeficijent korelacije veličina w_i i w_j, pri čemu je $\upsilon(w_i, w_j) = E[(w_i - \mu_i)(w_j - \mu_j)]$ kovarijancija veličina w_i i w_j.

NAPOMENE:

1. Varijancije σ_z^2 i σ_i^2 središnji su momenti drugog reda (vidi definicije C.2.13 i C.2.22) razdioba vjerojatnosti redom veličina z i w_i. Razdioba vjerojatnosti može se u potpunosti opisati njezinim očekivanjem, varijancijom i središnjim momentima višeg reda.

2. Jednadžba (13) iz podtočke 5.2.2, koja se [zajedno s jednadžbom (15)] primjenjuje za izračun sastavljene standardne nesigurnosti, istovjetna je jednadžbi (E.3), osim što se jednadžba (13) izražava preko procjene varijancija, standardnih odstupanja i koeficijenta korelacije.

E.3.2 U tradicionalnom nazivlju jednadžba (E.3) često se naziva "općim zakonom prijenosa pogrješke", nazivom koji je bolje primjenjivati na izraz oblika $\Delta z = \sum_{i=1}^{N} (\partial f / \partial w_i) \Delta w_i$, gdje je Δz promjena veličine z nastala zbog (malih) promjena Δw_i veličina w_i [vidi jednadžbu E.8)]. Zapravo, jednadžbu (E.3) prikladno je nazivati zakonom prijenosa nesigurnosti, kao što je učinjeno u ovim *uputama*, jer ona pokazuje kako se nesigurnosti ulaznih veličina w_i, za koje se uzima da su jednake standardnim odstupanjima razdioba vjerojatnosti veličina w_i, sastavljaju da bi dale nesigurnost izlazne veličine z ako se uzme da je ta nesigurnost jednaka standardnom odstupanju razdiobe vjerojatnosti veličine z.

E.3.3 Jednadžba (E.3) također se primjenjuje na prijenos višekratnika standardnih odstupanja, npr. kad bi se svako standardno odstupanje σ_i zamijenilo višekratnikom $k\sigma_i$, s istim k za svako σ_i standardno odstupanje izlazne veličine z zamijenilo bi se s $k\sigma_z$. Međutim, to se ne može primijeniti na prijenos intervala povjerenja. Kad bi se svako standardno odstupanje σ_i zamijenilo veličinom δ_i, koja određuje interval koji odgovara određenoj razini povjerenja p, dobivena veličina za z, δ_z, ne bi određivala interval koji odgovara istoj vrijednosti razine povjerenja p osim ako sve veličine w_i nisu opisane normalnim razdiobama. U jednadžbi (E.3) ne vrijedi pretpostavka o normalnosti razdioba vjerojatnosti veličina w_i. Točnije, kad bi se u jednadžbi (10) iz podtočke 5.1.2 svaka standardna nesigurnost $u(x_i)$ odredila iz neovisnih opetovanih opažanja i pomnožila t-faktorom koji za posebnu vrijednost razine povjerenja p (recimo, $p = 95$ posto) odgovara njezinu broju stupnjeva slobode, nesigurnost procjene y ne bi određivala interval koji odgovara toj vrijednosti razine povjerenja p (vidi podtočke G.3 i G.4).

NAPOMENA: Kad se s pomoću jednadžbe (E.3) prenose intervali povjerenja zahtjev normalnosti može biti jedan od razloga za povijesno razdvajanje sastavnica nesigurnosti izvedenih iz opetovanih opažanja, za koje se pretpostavljalo da su normalno raspodijeljene, od onih sastavnica nesigurnosti koje su se određivale jednostavno kao gornja i donja granica.

E.3.4 Razmotrimo ovaj primjer: neka izlazna veličina z ovisi samo o ulaznoj veličini w, $z = f(w)$, gdje je ulazna veličina w procijenjena kao srednja vrijednost od n vrijednosti w_k veličine w, neka se te n vrijednosti dobivaju iz n neovisnih opetovanih opažanja q_k slučajne varijable q i neka su w_k i q_k međusobno povezani izrazom:

$$w_k = \alpha + \beta q_k \tag{E.4}$$

Tu je α stalno "sustavno" odstupanje (ili pomak) zajedničko svim opažanjima, a β zajednički faktor ljestvice. Za odstupanje i faktor ljestvice, premda su nepromijenljivi tijekom odvijanja opažanja, pretpostavlja se da su opisani *apriornim* razdiobama vjerojatnosti, pri čemu su α i β najbolje procjene očekivanja tih razdioba. Najbolja je procjena veličine w aritmetička sredina ili prosječna vrijednost $\overline{w}$ dobivena iz izraza:

$$\overline{w} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (\alpha + \beta_{q_k}) \tag{E.5}$$

Veličina z tada se procjenjuje kao funkcija $f(\overline{w}) = f(\alpha, \beta, q_1, q_2, ..., q_n)$, a procjena $u^2(z)$ njezine varijancije $\sigma^2(z)$ dobiva se iz jednadžbe (E.3). Ako se zbog jednostavnosti pretpostavi da je $z = w$, tako da je najbolja procjena veličine $z = f(\overline{w}) = \overline{w}$, tada se može lako naći procjena $u^2(z)$. Uzimajući u obzir da je iz jednadžbe (E.5)

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \beta} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} q_k = \overline{q}$$

i

$$\frac{\partial f}{\partial q_k} = \frac{\beta}{n},$$

označujući procijenjene varijancije veličina α i β redom s $u^2(\alpha)$ i $u^2(\beta)$ te pretpostavljajući da ta pojedinačna opažanja nisu korelirana iz jednadžbe (E.3) dobiva se:

$$u^2(z) = u^2(\alpha) + \overline{q}^2 u^2(\beta) + \beta^2 \frac{s^2(q_k)}{n} \tag{E.6}$$

gdje je $s^2(q_k)$ eksperimentalna varijancija opažanja q_k izračunana u skladu s jednadžbom (4) u podtočki 4.2.2, a $s^2(q_k)/n = s^2(\overline{q})$ eksperimentalna varijancija srednje vrijednosti $\overline{q}$ [jednadžba (5) iz podtočke 4.2.3].

E.3.5 U tradicionalnom nazivlju treći član na desnoj strani jednadžbe (E.6) naziva se "slučajnim" doprinosom procijenjene varijancije $u^2(z)$, jer se on normalno smanjuje s porastom broja opažanja n, dok se prva dva člana nazivaju "sustavnim" doprinosima, jer ne ovise o n.

Štoviše, u nekim tradicionalnim obradbama mjerne nesigurnosti upitna je jednadžba (E.6) jer ne pravi razliku između nesigurnosti koje potječu od sustavnih djelovanja i nesigurnosti koje potječu od slučajnih djelovanja. Posebno se ne dopušta sastavljanje varijancija dobivenih iz *apriornih* razdioba vjerojatnosti i varijancija dobivenih iz razdioba koje se temelje na čestoći (pojave slučajnog događaja) jer se pojam vjerojatnosti smatra primjenjivim *samo* na događaje koji se mogu ponoviti velik broj puta u jednim te istim uvjetima, s vjerojatnošću p događaja ($0 \leq p \leq 1$) koja pokazuje *relativnu čestoću* s kojom će se događaj pojavljivati.

Nasuprot tomu gledištu, koje se temelji na čestoći pojave događaja, jednako je valjano gledište prema kojem je vjerojatnost mjera *stupnja uvjerenja* da će se koji događaj dogoditi [13, 14]. Npr., pretpostavimo da netko ima mogućnost dobitka kakvog malog iznosa novca D te da je on razuman kladitelj. Stupanj uvjerenja u pojavu događaja A jednak je $p = 0{,}5$ ako nijedan od ponuđenih izbora nema prednost:

1) dobiti D ako se pojavi događaj A, ali ništa ako se taj događaj ne pojavi;

2) dobiti D ako se događaj A ne pojavi, ali ništa ako se pojavi.

Preporuka INC-1 (1980) na kojoj počivaju ove *upute* neizravno prihvaća takvo shvaćanje vjerojatnosti jer ono promatra izraze kao što su jednadžba (E.6) kao prikladan put za izračunavanje standardne nesigurnosti mjernog rezultata.

E.3.6 Tri su različite prednosti prihvaćanja tumačenja vjerojatnosti koje se temelji na stupnju uvjerenja, standardnom odstupanju (standardnoj nesigurnosti) i zakonu prijenosa nesigurnosti [jednadžba (E.3)] kao temelju za izračun i izražavanje mjerne nesigurnosti, kako je učinjeno u ovim *uputama:*

a) zakon prijenosa nesigurnosti dopušta da se sastavljena standardna nesigurnost rezultata lako uključi u izračun određivanja standardne nesigurnosti drugog rezultata u kojem se prvi upotrebljava;

b) sastavljena standardna nesigurnost može služiti kao temelj za izračun intervala koji stvarno odgovaraju njihovim zahtijevanim razinama povjerenja i

c) kad se izračunava nesigurnost, nije nužno razvrstavanje sastavnica na "slučajne" ili "sustavne" (ili na koji drugi način) jer se sve sastavnice nesigurnosti obrađuju na isti način.

Prednost c) veoma je korisna jer je takvo razvrstavanje često izvor zbrke; sastavnica nesigurnosti nije ni "slučajna" ni "sustavna". Njezina je priroda uvjetovana uporabom odgovarajuće veličine ili, formalnije, kontekstom u kojem se ta veličina javlja u matematičkom modelu koji opisuje mjerenje. Prema tomu, kad se njezina pripadna veličina upotrebljava u različitim kontekstima, "slučajna" sastavnica može postati "sustavna" sastavnica i obrnuto.

E.3.7 Iz razloga iznesenih pod c) u Preporuci INC-1 (1980) ne razvrstavaju se sastavnice nesigurnosti na "slučajne" ili "sustavne". Doista, što se tiče izračuna sastavljene standardne nesigurnosti mjernog rezultata, nema potrebe razvrstavati sastavnice nesigurnosti te prema tomu nema stvarne potrebe za bilo kakvim sustavom razvrstavanja. Ipak, budući da prikladne oznake mogu katkad biti korisne u sporazumijevanju i raspravi o pojmovima, Preporuka INC-1 (1980) daje sustav za razvrstavanje tih dviju različitih *metoda* s pomoću kojih se mogu odrediti sastavnice nesigurnosti ["A" i "B" (vidi podtočke 0.7, 2.3.2 i 2.3.3)].

Razvrstavanjem metoda koje se upotrebljavaju za određivanje sastavnica nesigurnosti izbjegava se glavni problem povezan s razvrstavanjem samih sastavnica nesigurnosti, tj. ovisnost razvrstavanja koje sastavnice o tome kako se odgovarajuća veličina upotrebljava. Međutim, razvrstavanje metoda ne priječi skupljanje pojedinačnih sastavnica određenih u danom mjerenju tim dvjema metodama u posebne skupine za posebne svrhe, npr. kad se uspoređuju eksperimentalno opažene i teoretski predviđene mjere promjenljivosti izlaznih vrijednosti kojega složenog mjernog sustava (vidi podtočku 3.4.3).

E.4 Standardna odstupanja kao mjere nesigurnosti

E.4.1 Jednadžba (E.3) zahtijeva da se bez obzira na to kako je dobivena nesigurnost procjene ulazne veličine ona se mora odrediti kao standardna nesigurnost, tj. kao procijenjeno standardno odstupanje. Ako se umjesto standardne nesigurnosti odredi neka "sigurna" zamjena te standardne nesigurnosti, ta se zamjena ne može upotrebljavati u jednadžbi (E.3). Posebno, ako se u jednadžbi (E.3) upotrijebi "najveća granica pogrješke" (najveće zamislivo odstupanje od tobožnje najbolje procjene), konačna će nesigurnost imati neodređeno značenje i neće biti uporabljiva za uključivanje u druge naknadne izračune nesigurnosti drugih veličina (vidi podtočku E.3.3).

E.4.2 Kad se standardna nesigurnost kakve ulazne veličine ne može odrediti analizom rezultata odgovarajućeg broja opetovanih opažanja, razdioba vjerojatnosti mora se prihvatiti na temelju manjeg znanja nego što bi to bilo poželjno. To, međutim, ne čini tu razdiobu manjkavom ili pogrješnom; kao i sve razdiobe vjerojatnosti ona je izraz postojećeg znanja.

E.4.3 Procjene dobivene na temelju opetovanih opažanja nisu nužno bolje od onih koje su dobivene na drugi način. Promatrajmo $s(\overline{q})$, eksperimentalno standardno odstupanje srednje vrijednosti dobiveno iz n nezavisnih opažanja q_k normalno raspodijeljene slučajne varijable q [vidi jednadžbu (5) u 4.2.3]. Veličina $s(\overline{q})$ je statistika (vidi definiciju C.2.23) koja procjenjuje $\sigma(\overline{q})$, standardno odstupanje razdiobe vjerojatnosti srednje vrijednosti $\overline{q}$ koje bi se dobilo kad bi se mjerenje opetovalo beskonačan broj puta. Varijancija $\sigma^2[s(\overline{q})]$ eksperimentalnoga standardnog odstupanja $s(\overline{q})$ približno je dana izrazom:

$$\sigma^2[s(\overline{q})] \approx \sigma^2(\overline{q})/(2\nu) \tag{E.7}$$

gdje je $\nu = n - 1$ broj stupnjeva slobode eksperimentalnoga standardnog odstupanja $s(\overline{q})$ (vidi podtočku G.3.3). Prema tomu, relativno standardno odstupanje eksperimentalnoga standardnog odstupanja $s(\overline{q})$, koje je dano omjerom $\sigma[s(\overline{q})]$ / $\sigma(q)$ i koje se može uzeti kao mjera relativne nesigurnosti eksperimentalnog odstupanja srednje vrijednosti $s(\overline{q})$, približno je jednako $[2(n-1)]^{-1/2}$. Ta "nesigurnost nesigurnosti" srednje vrijednosti $\overline{q}$ koja potječe iz čisto statističkih razloga ograničenog uzorkovanja može biti iznenađujuće velika; za $n = 10$ opažanja ona je 24 posto. Ta i druge vrijednosti dane su u tablici E.1, koja pokazuje da standardno odstupanje statistički procijenjenoga standardnog odstupanja nije zanemarivo za praktične vrijednosti broja opažanja n. Prema tomu, može se zaključiti da određivanja A-vrste standardne nesigurnosti nisu nužno pouzdanija od određivanja B-vrste te da u mnogim praktičnim situacijama gdje je broj opažanja ograničen sastavnice dobivene određivanjima B-vrste mogu biti bolje poznate nego sastavnice dobivene određivanjima A-vrste.

E.4.4 Uzevši u obzir da su nesigurnosti pridružene primjeni posebne mjerne metode statistički parametri koji opisuju slučajne varijable, dokazivalo se da postoje slučajevi "istinskih sustavnih djelovanja" čija se nesigurnost može obrađivati drukčije. Primjer je sustavno odstupanje koje ima nepoznatu nepromjenljivu vrijednost koja je ista za svako određivanje rezultata tom metodom zbog moguće nesavršenosti u načelu same metode ili neke od pretpostavaka na kojima se temelji ta metoda. Ali ako se potvrdi da postoji mogućnost takvoga sustavnog odstupanja i ako se vjeruje da je njegova velikoća možda znatna po veličini, ono se može opisati razdiobom vjerojatnosti, ipak jednostavno oblikovanom, koja se temelji na znanju koje je dovelo do zaključka da bi ono moglo postojati i biti znatno (po veličini). Dakle, ako se vjerojatnost smatra mjerom stupnja vjerovanja da će se neki događaj dogoditi, doprinos takvoga sustavnog djelovanja može se uključiti u sastavljenu standardnu nesigurnost mjernog rezultata određivanjem te nesigurnosti kao standardne nesigurnosti kakve *apriorne* razdiobe vjerojatnosti te se ona može obrađivati na isti način kao bilo koja druga standardna nesigurnost ulazne veličine.

PRIMJER: Specifikacijom pojedinoga mjernog postupka zahtijeva se da se određena ulazna veličina izračunava iz određenog razvoja u red potencija čiji članovi višeg reda nisu točno poznati. Zbog toga što se ti članovi ne mogu točno obrađivati sustavno djelovanje dovodi do nepoznatih nepromjenjivih sustavnih odstupanja koja se ne mogu eksperimentalno uzorkovati opetovanjem postupka. Dakle, nesigurnost pridružena tom djelovanju ne može se odrediti i uključiti u nesigurnost konačnoga mjernog rezultata ako se strogo slijedi tumačenje vjerojatnosti utemeljeno na čestoći. Međutim, tumačenje vjerojatnosti na temelju stupnja vjerovanja dopušta da se nesigurnost koja opisuje to djelovanje odredi iz *apriorne* razdiobe vjerojatnosti (izvedene iz dostupnog znanja o netočno poznatim članovima) i uključi u izračun sastavljene standardne nesigurnosti mjernog rezultata kao i svaka druga nesigurnost.

Tablica E.1: $\sigma[s(\overline{q})]/\sigma(\overline{q})$, standardno odstupanje eksperimentalnoga standardnog odstupanja srednje vrijednosti $\overline{q}$ dobivene iz n neovisnih opažanja normalno raspodijeljene slučajne varijable q u odnosu na standardno odstupanje srednje vrijednosti[(a) (b)]

Broj opažanja n	$\sigma[s(\overline{q})]/\sigma(\overline{q})$ (posto)
2	76
3	52
4	42
5	36
10	24
20	16
30	13
50	10

(a) Dane vrijednosti izračunane su iz točnih izraza za $\sigma[s(\overline{q})]/\sigma(\overline{q})$, a ne iz približnog iznosa $[2(n-1)]^{-1/2}$.

(b) U izrazu $\sigma[s(\overline{q})]/\sigma(\overline{q})$ nazivnik $\sigma(\overline{q})$ je očekivanje $E[S/\sqrt{n}]$, a brojnik $\sigma[s(\overline{q})]$ kvadratni je korijen varijancije $V[S/\sqrt{n}]$, gdje S označuje slučajnu varijablu jednaku standardnom odstupanju od n neovisnih slučajnih varijabla X_1, ..., X_N, od kojih svaka ima normalnu razdiobu sa srednjom vrijednošću μ i varijancijom σ^2:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}\ , \quad \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Očekivanje i varijancija varijable S dani su izrazima:

$$E[S] = \sqrt{\frac{2}{n-1}}\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma[(n-1)/2]}\sigma, \quad V[S] = \sigma^2 - E[S]^2\ ,$$

Gdje je $\Gamma(x)$ gama funkcija. Napominjemo da je $E[S] < \sigma$ za konačni broj n.

E.5 Usporedba dvaju gledišta na nesigurnost

E.5.1 Težište je ovim *uputama* na mjernom rezultatu i njegovoj mjernoj nesigurnosti, a ne na neutvrdivim veličinama kao što su "istinita" vrijednost i pogrješka (vidi dodatak D). Uzimajući praktično gledište da je mjerni rezultat jednostavno vrijednost pripisana mjerenoj veličini, a nesigurnost tog rezultata mjera rasipanja vrijednosti koje bi se razumno mogle pripisati mjerenoj veličini, ove *upute* zapravo prekidaju često zbunjujuću vezu između nesigurnosti i neutvrdivih veličina kao što su "istinita" vrijednost i pogrješka.

E.5.2 Ta se veza može razumjeti objašnjenjem izvoda jednadžbe (E.3) (zakon prijenosa nesigurnosti) s gledišta koje se temelji na "istinitoj" vrijednosti i pogrješci. U tom se slučaju μ_i smatra nepoznatom, jedinstvenom "istinitom" vrijednošću ulazne veličine w_i, a za svaku se veličinu w_i pretpostavlja da je povezana sa svojom "istinitom" vrijednošću μ_i izrazom $w_i = \mu_i + \varepsilon_i$, gdje je ε_i pogrješka veličine w_i. Pretpostavlja se da je očekivanje razdiobe vjerojatnosti svake pogrješke ε_i jednako ništici $E(\varepsilon_i) = 0$, s varijancijom jednakom $E(\varepsilon_i^2) = \sigma_i^2$. Jednadžba (E.1) tada postaje:

$$\varepsilon_z = \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial w_i}\varepsilon_i \tag{E.8}$$

gdje je $\varepsilon_z = z - \mu_z$ pogrješka veličine z, a μ_z "istinita" vrijednost veličine z. Ako se tada uzme očekivanje kvadrata pogrješke ε_z, dobije se jednadžba istovjetna po obliku jednadžbi (E.9), ali gdje je $E(\varepsilon_z^2) = \sigma_z^2$ varijancija pogrješke ε_z, a $\rho_{ij} = \nu(\varepsilon_i, \varepsilon_j)/(\sigma_i^2\sigma_j^2)^{1/2}$ koeficijent korelacije pogrješaka ε_i, i ε_j, gdje je $\nu(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = E(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$ kovarijancija pogrješaka $\varepsilon_{i,}\, \varepsilon_j$. Te su varijancije i koeficijenti korelacije, dakle, pridružene *pogrješkama* ulaznih veličina, a ne samim ulaznim veličinama.

NAPOMENA: Pretpostavlja se da se vjerojatnost smatra mjerom stupnja vjerovanja da će se koji događaj zbiti, što povlači za sobom da se sustavna pogrješka može obrađivati na isti način kao slučajna pogrješka i da ε_i prikazuje i jednu i drugu vrstu pogrješke.

E.5.3 U praksi ta razlika u gledištu ne dovodi do razlike u brojčanoj vrijednosti mjernog rezultata ili u brojčanoj vrijednosti nesigurnosti dodijeljene tom rezultatu.

Prvo, u oba se slučaja upotrebljavaju najbolje dostupne procjene ulaznih veličina w_i kako bi se iz funkcije f dobila najbolja procjena izlazne veličine z; nema razlike u *izračunima* ako se najbolje procjene smatraju vrijednostima koje se najvjerojatnije trebaju pripisati razmatranim veličinama ili najboljim procjenama njihovih "istinitih" vrijednosti.

Drugo, zbog $\varepsilon_i = w_i - \mu_i$ i zbog toga što istinite vrijednosti μ_i prikazuju jedinstvene nepromjenjive vrijednosti te, prema tomu, nemaju nesigurnosti, varijancije i standardna odstupanja pogrješaka ε_i i ulaznih veličina w_i istovjetna su. To znači da su standardne nesigurnosti, koje služe kao procjene standardnih odstupanja σ_i kako bi se dobila sastavljena standardna nesigurnost mjernog rezultata, u oba slučaja istovjetne te da će dati istu brojčanu vrijednost za tu nesigurnost. Nadalje, bez obzira na to smatra li se standardna nesigurnost mjerom rasipanja razdiobe vjerojatnosti ulazne veličine ili mjerom rasipanja razdiobe vjerojatnosti pogrješke te veličine, nema razlike u *izračunima* standardne nesigurnosti.

NAPOMENA: Bez pretpostavke iz napomene iz podtočke E.5.2, rasprava iz ove podtočke ne bi se primjenjivala kad bi sve procjene ulaznih veličina i nesigurnosti tih procjena bile dobivene iz statističke analize opetovanih opažanja, tj. određivanjem A-vrste.

E.5.4 Budući da pristup koji se temelji na "istinitoj" vrijednosti i pogrješci daje iste brojčane rezultate kao i pristup odabran u ovim *uputama* (pod uvjetom da je učinjena pretpostavka iz napomene u podtočki E.5.2), pojam nesigurnosti iz ovih *uputa* uklanja brkanje pogrješke i nesigurnosti (vidi dodatak D). Doista, praktični pristup ovih *uputa*, u kojima je težište na opaženoj (ili procijenjenoj) vrijednosti veličine i opaženoj (ili procijenjenoj) promjenljivosti te vrijednosti, čini svako spominjanje pogrješke potpuno nepotrebnim.

Dodatak F

Praktične upute za određivanje sastavnica nesigurnosti

Ovaj dodatak daje dodatne prijedloge za određivanje sastavnica nesigurnosti, uglavnom praktične naravi, kojima je svrha dopuniti prijedloge već dane u točki 4.

F.1 Sastavnice određene iz opetovanih opažanja: određivanje standardne nesigurnosti A-vrste

F.1.1 Slučajnost i opetovana opažanja

F.1.1.1 Nesigurnosti određene iz opetovanih opažanja često se stavljaju u opreku s nesigurnostima određenim na drugi način kao "objektivne", "statistički stroge" itd. To pogrješno podrazumijeva da se one mogu odrediti jedino primjenom statističkih formula na opažanja i da njihovo određivanje ne zahtijeva primjenu određenih prosudba.

F.1.1.2 Postavlja se prvo pitanje: "U kojoj su mjeri opetovana opažanja potpuno neovisna ponavljanja mjernog postupka?" Ako se sva opažanja provode na jednom uzorku i ako je uzorkovanje dio mjernog postupka jer je mjerena veličina svojstvo tvari (za razliku od svojstva određene posebne tvari), tada ta opažanja nisu neovisno opetovana; određivanje sastavnice varijancije koja potječe od mogućih razlika među uzorcima mora se dodati opaženoj varijanciji opetovanih opažanja provedenih na jednom uzorku.

Ako je dovođenje na ništicu kojeg instrumenta dio mjernog postupka, taj bi se instrument trebao opetovano dovoditi na ništicu prilikom svakog ponavljanja mjerenja. Čak i ako postoji zanemariva promjena značajke tijekom razdoblja u kojem se provode opažanja, ipak postoji moguća statistički odrediva nesigurnost koja se može pridružiti dovođenju na ništicu.

Slično tomu, kad treba očitati barometar, trebalo bi ga očitavati za svako ponavljanje mjerenja (najbolje nakon njegova poremećaja i povratka u ravnotežno stanje); mogle bi postojati promjene u pokazivanju i očitanju čak i ako je barometarski tlak stalan.

F.1.1.3 Drugo, postavlja se pitanje jesu li svi utjecaji za koje se pretpostavlja da su slučajni stvarno slučajni. Jesu li srednje vrijednosti i varijancije njihovih razdioba stalne ili možda tijekom razdoblja opetovanih opažanja postoji promjena vrijednosti koje nemjerljive utjecajne veličine? Ako postoji dostatan broj opažanja, mogu se izračunati aritmetičke sredine rezultata prve i druge polovice tog razdoblja i njihova eksperimentalna standardna odstupanja te se te dvije sredine mogu međusobno usporediti kako bi se prosudilo je li ta razlika među njima statistički važna i, prema tomu, postoji li kakvo djelovanje koje se mijenja s vremenom.

F.1.1.4 Ako su vrijednosti napon i frekvencija električnog napajanja, tlak i temperatura vode, tlak dušika itd. koji se upotrebljavaju u laboratoriju utjecajne veličine, u njihovim promjenama obično postoji snažan neslučajan element koji se ne može previdjeti.

F.1.1.5 Ako se najmanje važna znamenka digitalnog pokazivanja zbog "šuma" tijekom opažanja neprekidno mijenja, katkad je teško nehotice ne izabrati osobno privlačne vrijednosti te znamenke. Bolje je urediti neke načine zamrzavanja pokazivanja u kojem navoljnom trenutku i zapisivanja toga zamrznutog rezultata.

F.1.2 Korelacije

Veći dio razmatranja iz ove podtočke također je primjenjiv i na određivanja standardne nesigurnosti B-vrste.

F.1.2.1 Za kovarijancije pridružene procjenama dviju ulaznih veličina X_i i X_j može se uzeti da su jednake ništici ili se mogu smatrati nevažnima ako:

a) su X_i i X_j *nekorelirane* (slučajne varijable, a ne fizičke veličine za koje se pretpostavlja da su invarijante [vidi podtočku 4.1.1, napomenu 1.]) jer su npr. bile opetovano, iako ne istodobno, mjerene u *različitim* neovisnim pokusima ili jer prikazuju konačne veličine *različitih* izračuna koji su bili neovisno provedeni ili ako

b) se svaka od veličina X_i i X_j može smatrati stalnom ili ako

c) nema dostatno podataka za određivanje kovarijancije pridružene procjenama veličina X_i i X_j.

NAPOMENE:

1. S druge strane, u nekim slučajevima, kao u primjeru referentnog otpornika iz napomene 1. iz podtočke 5.2.2, očigledno je da su ulazne veličine potpuno korelirane i da se standardne nesigurnosti njihovih procjena linearno sastavljaju.

2. Različiti pokusi mogu ne biti neovisni ako se npr. u svakom upotrebljava isti instrument (vidi podtočku F.1.2.3).

F.1.2.2 S pomoću jednadžbe (17) iz podtočke 5.2.3 može se odrediti jesu li ili nisu dvije opetovano i istodobno opažane ulazne veličine korelirane. Npr., ako je frekvencija temperaturno nekompenziranog ili slabo kompenzira-nog oscilatora ulazna veličina, ako je temperatura okoliša također ulazna veličina i ako se one istodobno opažaju, među njima se može izračunom kovarijancije frekvencije oscilatora i temperature okoliša otkriti značajna korelacija.

F.1.2.3 U praksi su ulazne veličine često korelirane jer se za procjenu njihovih vrijednosti upotrebljavaju isti fizički mjerni etalon, isti mjerni instrument, isti referentni podatak ili čak ista mjerna metoda koji imaju znatnu nesigurnost. Pretpostavimo, bez narušavanja općenitosti, da dvije ulazne veličine X_1 i X_2 s procjenama x_1 i x_2 ovise o skupu međusobno nekoreliranih varijabla $Q_1, Q_2, ..., Q_L$. Na taj se način može napisati $X_1 = F(Q_1, Q_2, ..., Q_L)$ i $X_2 = G(Q_1, Q_2, ..., Q_L)$, premda se neke od tih varijabla mogu stvarno pojavljivati samo u jednoj funkciji, a ne i drugoj. Ako je $u^2(q_l)$, procijenjena varijancija pridružena procjeni q_l veličine Q_l, procijenjena varijancija pridružena procjeni x_1, na temelju jednadžbe (10) iz podtočke 5.1.2, jednaka je:

$$u^2(x_1) = \sum_{l=1}^{L} \left(\frac{\partial F}{\partial q_l} \right)^2 u^2(q_l) \tag{F.1}$$

Sličnim se izrazom određuje i varijancija $u^2(x_2)$. Procijenjena kovarijancija pridružena procjenama x_1 i x_2 dana je izrazom:

$$u(x_1, x_2) = \sum_{l=1}^{L} \frac{\partial F}{\partial q_l} \frac{\partial G}{\partial q_l} u^2(q_l) \tag{F.2}$$

Budući da tomu zbroju doprinose samo oni članovi za koje je $\partial F/\partial q_l \neq 0$ i $\partial G/\partial q_l \neq 0$ za dano l, njihova je kovarijancija jednaka ništici ako F i G nemaju ni jedne zajedničke varijable.

Procijenjeni koeficijent korelacije $r(x_1, x_2)$ pridružen tim dvjema procjenama x_1 i x_2 određuje se iz kovarijancije $u(x_1, x_2)$ [jednadžba (F.2)] i jednadžbe (14) iz podtočke 5.2.2, sa standardnom nesigurnošću $u(x_1)$ izračunanom iz jednadžbe (F.1) i standardnom nesigurnošću $u(x_2)$ izračunanom iz sličnog izraza [vidi također jednadžbu (H.9) iz podtočke H.2.3]. Procijenjena kovarijancija pridružena dvjema procjenama ulaznih veličina može također imati statističku sastavnicu [vidi jednadžbu (17) iz podtočke 5.2.3] i sastavnicu koja se pojavljuje iz razloga o kojima se raspravlja u ovoj podtočki.

PRIMJERI:

1. Etalonski otpornik R_S upotrebljava se u istom mjerenju za određivanje struje I i temperature t. Struja se određuje s pomoću digitalnog voltometra, mjerenjem napona na priključcima tog etalona; temperatura se određuje mjerenjem s pomoću otporskog mosta i etalona otpora $R_t(t)$ umjerenog otporskog osjetila temperature čiji je odnos temperatura – otpor u području

$15\ °C \leq t \leq 30\ °C$ jednak $t = aR_t^2(t) - t_0$ gdje su a i t_0 poznate stalnice. Na taj se način struja određuje iz odnosa $I = V_S/R_S$, a temperatura iz odnosa $t = a\beta^2(t)R_S^2 - t_0$, gdje je $\beta(t)$ mjereni odnos $R_t(t)/R_S$ dobiven s pomoću mjernog mosta.

Budući da je samo veličina R_S zajednička izrazima za I i t, jednadžba (F.2) daje za kovarijanciju veličina I i t:

$$u(I, t) = \frac{\partial I}{\partial R_S}\frac{\partial t}{\partial R_S}u^2(R_S) = \left(-\frac{V_S}{R_S^2}\right)[2\alpha\beta^2(t)R_S]u^2(R_S) = -\frac{2I(t+t_0)}{R_S^2}u^2(R_S)$$

(Zbog jednostavnosti zapisa u ovom se primjeru isti znak upotrebljava i za ulaznu veličinu i za njezinu procjenu).

Da bi se dobila brojčana vrijednost kovarijancije, u taj se izraz uvršćuju brojčane vrijednosti mjernih veličina I i t i vrijednosti otpora R_S i $u(R_S)$ dane u potvrdi o umjeravanju etalonskog otpornika. Jedinica za kovarijanciju $u(I, t)$ očito je A · °C jer je dimenzija relativne varijancije $[u(R_S)/R_S]^2$ jednaka jedan (tj. ona je tzv. nedimenzijska veličina).

Nadalje, neka je veličina P povezana s ulaznim veličinama I i t izrazom $P = C_0I^2/(T_0 + t)$, gdje su C_0 i T_0 poznate stalnice sa zanemarivim nesigurnostima $[u^2(C_0) \approx 0, u^2(T_0) \approx 0]$. Jednadžba (13) iz podtočke 5.2.2 tada daje varijanciju veličine P izraženu s pomoću varijancije veličina I i t i njihove kovarijancije:

$$\frac{u^2(P)}{P^2} = 4\frac{u^2(I)}{I^2} - 4\frac{u(I,t)}{I(T_0+t)} + \frac{u^2(t)}{(T_0+t)^2}$$

Varijancije $u^2(I)$ i $u^2(t)$ dobivaju se primjenom jednadžbe (10) iz podtočke 5.1.2 na odnose $I = V_S/R_S$ i $t = a\beta^2(t)R_S^2 - t_0$. To daje ove rezultate:

$$u^2(I)/I^2 = u^2(V_S)/V_S^2 + u^2(R_S)/R_S^2$$

$$u^2(t) = 4(t+t_0)^2u^2(\beta)/\beta^2 + 4(t+t_0)^2u^2(R_S)/R_S^2$$

gdje se zbog jednostavnosti podrazumijeva da su nesigurnosti stalnica t_0 i a također zanemarive. Ti izrazi mogu se lako odrediti jer se iz opetovanih očitanja voltometra i otporskog mosta mogu odrediti redom varijancije $u^2(V_S)$ i $u^2(\beta)$. Naravno, kad se određuju $u^2(V_S)$ i $u^2(\beta)$, moraju se također uzeti u obzir sve nesigurnosti svojstvene samom mjernom instrumentu i primijenjenom mjernom postupku.

2. Neka se u primjeru iz napomene 1. iz podtočke 5.2.2 umjeravanje svakog otpornika prikazuje izrazom $R_i = \alpha_i R_S$ sa standardnom nesigurnošću $u(\alpha_i)$ izmjerenog omjera α_i dobivenom iz opetovanih opažanja. Nadalje, neka je $\alpha_i \approx 1$ za svaki otpornik i neka je nesigurnost $u(\alpha_i)$ u biti ista za svako umjeravanje tako da je $u(\alpha_i) \approx u(\alpha)$. Tada jednadžbe (F.1) i (F.2) daju $u^2(R_i) = R_S^2u^2(\alpha) + u^2(R_S)$ i $u(R_i, R_j) = u^2(R_S)$. To na temelju jednadžbe (14) iz podtočke 5.2.2 podrazumijeva da je koeficijent korelacije bilo kojih dvaju otpornika ($i \neq j$) jednak:

$$r(R_i, R_j) \equiv r_{ij} = \left\{1 + \left[\frac{u(\alpha)}{u(R_S)/R_S}\right]^2\right\}^{-1}$$

Budući da je $u(R_S)/R_S = 10^{-4}$, ako je $u(\alpha) = 100 \times 10^{-6}$, onda je $r_{ij} \approx 0{,}5$; ako je $u(\alpha) = 10 \times 10^{-6}$ onda je $r_{ij} \approx 0{,}990$ i ako je $u(\alpha) = 1 \times 10^{-6}$, onda je $r_{ij} \approx 1{,}000$. Prema tomu, kad je $u(\alpha) \to 0$, tada $r_{ij} \to 1$, a $u(R_i) \to u(R_S)$.

NAPOMENA: Općenito, pri umjeravanjima uspoređivanjem kao u ovom primjeru procijenjene su vrijednosti umjeravanih elemenata korelirane sa stupnjem korelacije koji ovisi o omjeru nesigurnosti uspoređivanja i nesigurnosti referentnog etalona. Kad je nesigurnost umjeravanja zanemariva u odnosu na nesigurnost etalona, što je u praksi čest slučaj, koeficijenti korelacije jednaki su +1, a nesigurnost svakoga umjerenog elementa jednaka je nesigurnosti etalona.

F.1.2.4 Potreba za uvođenjem kovarijancije $u(x_i, x_j)$ može se zaobići ako se izvorni skup ulaznih veličina $X_1, X_2, ..., X_N$ o kojima ovisi mjerena veličina Y [vidi jednadžbu (1) u podtočki 4.1] preodredi na takav način da kao dodatne neovisne veličine uključuje one veličine Q_l koje su zajedničke za dvije ili više izvornih veličina X_i. (Da bi se uspostavio puni odnos između utjecajne veličine Q_l i veličine X_i na koju ona djeluje, može biti nužno provesti dodatna mjerenja). Ipak, u nekim situacijama može biti praktičnije zadržati kovarijancije nego povećavati broj ulaznih veličina. Sličan se postupak može provoditi s kovarijancijama istodobnih opetovanih opažanja [vidi jednadžbu (17) u podtočki 5.2.3], ali utvrđivanje prikladnih dodatnih ulaznih veličina često je *ad hoc* postupak i nije fizikalno utemeljen.

PRIMJER: Ako se u primjeru 1. i iz podtočke F.1.2.3 u izraz za P uvrste izrazi za I i t izraženi preko R_S dobiva se rezultat:

$$P = \frac{C_0 V_S^2}{R_S^2 [T_0 + \alpha\beta^2(t) R_S^2 - t_0]}$$

te se na račun zamjene ulaznih veličina I i t veličinama V_S, R_S i β izbjegavaju korelacije među veličinama I i t. Budući da su te veličine nekorelirane, varijancije veličine P mogu se dobiti iz jednadžbe (10) iz podtočke 5.1.2.

F.2 Sastavnice određene na drugi način: određivanje standardne nesigurnosti B-vrste

F.2.1 Potreba za određivanjima B-vrste

Kad bi mjerni laboratorij imao neograničeno vrijeme i izvore, on bi mogao provesti iscrpna statistička istraživanja svakoga mogućeg uzroka nesigurnosti, npr. uporabom instrumenata različite izradbe i vrste, različitih mjernih metoda, različitih primjena metode i različitih aproksimacija u njihovim teoretskim modelima mjerenja. Nesigurnosti pridružene svim tim uzrocima mogle bi se tada odrediti statističkom analizom niza opažanja, a nesigurnost svakog uzroka opisivala bi se statistički izračunanim standardnim odstupanjem. Drugim riječima, sve bi se sastavnice nesigurnosti dobivale određivanjem A-vrste. Budući da takvo istraživanje nije ekonomski praktično, mnoge se sastavnice nesigurnosti moraju odrediti na koji drugi praktično izvediv način.

F.2.2 Matematički određene razdiobe

F.2.2.1 Razlučivanje digitalnog pokazivanja

Jedan je od izvora nesigurnosti digitalnog instrumenta razlučivanje njegova pokaznog uređaja. Npr., čak i kad bi sva opetovana pokazivanja bila istovjetna, mjerna nesigurnost koja se može pripisati ponovljivosti ne bi bila jednaka ništici jer postoji područje ulaznih signala u instrument koji bi u poznatom intervalu vrijednosti ulaznih signala davali isto pokazivanje. Ako je razlučivanje pokaznog uređaja jednako δx, vrijednost poticaja koji proizvodi dano pokazivanje X može ležati s jednakom vjerojatnošću bilo gdje u intervalu od $X - \delta x/2$ do $X + \delta x/2$. Poticaj se, prema tomu, opisuje pravokutnom razdiobom vjerojatnosti (vidi podtočke 4.3.7 i 4.4.5) širine δx s varijancijom $u^2 = (\delta x)^2/12$, što za svako pokazivanje podrazumijeva standardnu nesigurnost jednaku $u = 0{,}29\delta x$.

Prema tomu, vagarski uređaj s pokaznim uređajem čija je najmanja važna znamenka jednaka 1 g ima zbog razlučivanja tog uređaja varijanciju jednaku $u^2 = (1/12)$ g^2 i standardnu nesigurnost jednaku $u = (1/\sqrt{12})$ g $= 0{,}29$ g.

F.2.2.2 Histereza

Određene vrste histereze mogu prouzročiti sličnu vrstu nesigurnosti. Pokazivanje kojeg instrumenta može se razlikovati za utvrđen i poznat iznos ovisno o tome rastu li ili padaju uzastopna očitanja. Oprezan poslužitelj bilježi smjer uzastopnih očitanja i provodi prikladne ispravke. Međutim, smjer histereze nije uvijek zamjetljiv: u instrumentu oko ravnotežne točke mogu postojati skrivene oscilacije tako da pokazivanje ovisi o smjeru iz kojeg se toj točki konačno približava. Ako je područje mogućih očitanja zbog tog uzroka jednako δx, varijancija je ponovno jednaka $u^2 = (\delta x)^2/12$, a standardna nesigurnost zbog histereze jednaka je $u = 0{,}29\delta x$.

F.2.2.3 Aritmetika konačne preciznosti

Zaokruživanje ili rezanje brojeva koje nastaje automatskim smanjenjem podataka u računalu na duljinu riječi računala može također biti izvor nesigurnosti. Promatrajmo npr. računalo s duljinom riječi od 16 bita. Ako se tijekom računanja broj koji ima tu duljinu riječi oduzima od drugog broja od kojeg se razlikuje samo u 16-tom bitu, ostaje samo jedan važan bit. Takvi se slučajevi mogu pojavljivati u određivanju "loše kondicioniranih" algoritama i mogu biti teško predvidivi. Iskustveno određivanje takve nesigurnosti može se dobiti povećanjem najvažnije ulazne veličine u izračunu (postoji često kakva ulazna veličina koja je razmjerna velikoći izlazne veličine) za male iznose dok se ne promijeni izlazna veličina; najmanja promjena ulazne veličine koja se može dobiti na takav način može se uzeti kao mjera te nesigurnosti; ako je to δx, varijancija je jednaka $u^2 = (\delta x)^2/12$, a nesigurnost $u = 0{,}29\delta x$.

NAPOMENA: Određivanje nesigurnosti može se provjeriti uspoređivanjem rezultata izračuna koji se provodi na stroju s ograničenom duljinom riječi s rezultatom tog istog izračuna koji se provodi na stroju sa znatno većom duljinom riječi.

F.2.3 Uvedene ulazne vrijednosti

F.2.3.1 *Uvedena* vrijednost ulazne veličine vrijednost je koja nije procijenjena tijekom određenog mjerenja već je dobivena drugdje kao rezultat neovisna izračuna. Često je takva uvedena vrijednost praćena nekom vrstom iskaza njezine nesigurnosti. Npr., ta nesigurnost može biti dana kao kakvo standardno odstupanje, kakva višestrukost standardnog odstupanja ili poluširina kojeg intervala koji ima navedenu razinu povjerenja. Alternativno se mogu dati gornja i donja granica, ali bez podataka o nesigurnosti. U posljednjem slučaju za primjenu te vrijednosti mora se, na temelju prirode mjerene veličine, pouzdanosti izvora podataka te nesigurnosti za takve veličine dobivene u praksi itd. upotrijebiti vlastito znanje o vjerojatnoj velikoći nesigurnosti.

NAPOMENA: Rasprava o nesigurnosti uvedenih ulaznih veličina uključena je iz praktičnih razloga u podtočku o određivanju nesigurnosti B-vrste; nesigurnost takve veličine mogla bi biti sastavljena od sastavnica dobivenih određivanjem A-vrste i određivanja B-vrste. Budući da za izračun sastavljene standardne nesigurnosti nije nužno praviti razliku među sastavnicama određenim tim dvjema metodama, nije nužno znati ni sastav nesigurnosti uvedene veličine.

F.2.3.2 Neki laboratoriji koji provode umjeravanja prihvatili su praksu izražavanja "nesigurnosti" u obliku gornje i donje granice koje određuju interval koji ima "najmanju" razinu povjerenja, npr. "barem" 95 posto. To se može smatrati primjerom tzv. "sigurne" nesigurnosti (vidi podtočku E.1.2), ona se ne može pretvoriti u standardnu nesigurnost bez znanja kako je ona izračunana. Ako je dano dostatno podataka, ona se može preračunati u skladu s pravilima ovih *uputa*; u protivnom mora se načiniti neovisna procjena te nesigurnosti na neki drugi način.

F.2.3.3 Neke nesigurnosti dane su jednostavno kao najveće granice za koje se kaže da unutar njih leže sve vrijednosti veličine. Općenito se pretpostavlja da su sve vrijednosti unutar tih granica jednako vjerojatne (pravokutna razdioba vjerojatnosti), međutim, takva se razdioba ne bi trebala pretpostavljati ako ima razloga očekivati da su vrijednosti unutar tih granica, ali u neposrednoj njihovoj blizini, manje vjerojatne od vrijednosti bližih središtu intervala omeđena tim granicama. Pravokutna razdioba s poluširinom a ima varijanciju jednaku $a^2/3$; normalna razdioba za koju je a poluširina intervala koji ima razinu povjerenja od 99,73 posto ima varijanciju jednaku $a^2/9$. Može biti uputno prihvatiti kompromis između tih vrijednosti, npr. pretpostavljajući trokutnu razdiobu čija je varijancija jednaka $a^2/6$ (vidi podtočke 4.3.9 i 4.4.6).

F.2.4 Mjerene ulazne veličine

F.2.4.1 Jedno opažanje, umjerenim instrumentima

Ako je procjena ulazne veličine dobivena iz jednog opažanja s posebnim instrumentom koji je umjeren prema etalonu male nesigurnosti, nesigurnost te procjene uglavnom je jednaka ponovljivosti tog instrumenta. Varijancija opetovanih mjerenja tim instrumentom mogla je biti dobivena kojom prijašnjom prigodom, ne nužno u točno istoj vrijednosti očitanja, ali dostatno blizu da bi bila uporabljiva, te se može pretpostaviti da je ta varijancija primjenljiva na promatranu ulaznu veličinu. Ako takvi podatci nisu dostupni, procjena varijancije može se načiniti na temelju naravi mjernog uređaja ili instrumenta, na temelju poznatih varijancija drugih instrumenata slične konstrukcije itd.

F.2.4.2 Jedno opažanje, ovjerenim instrumentima

Svi instrumenti nisu praćeni potvrdom o umjeravanju ili krivuljom umjeravanja. Većina instrumenata, međutim, izrađuje se prema kakvoj pisanoj normi i ovjerava od strane proizvođača ili neovisne ovlaštene organizacije da je u skladu s tom normom. Obično ta norma sadržava mjeriteljske zahtjeve, često u obliku "najveće dopuštene pogrješke", s kojima taj instrument treba biti u skladu. Sukladnost tog instrumenta s tim zahtjevima određuje se njegovom usporedbom s kakvim referentnim instrumentom čija je najveća dopuštena nesigurnost obično određena tom normom. Ta je nesigurnost tada sastavnica nesigurnosti ovjerenog instrumenta.

Ako nije ništa poznato o krivulji pogrješke (značajki) ovjerenog instrumenta, mora se pretpostaviti da pogrješka može s istom vjerojatnošću poprimiti bilo koju vrijednost unutar dopuštenih granica, tj. da ima pravokutnu razdiobu vjerojatnosti. Međutim, određene vrste instrumenata imaju takve značajke da su te pogrješke, npr. vjerojatno uvijek pozitivne u jednom dijelu mjernog područja, a negativne u drugim dijelovima mjernog područja. Katkad se takvi podatci mogu izvesti određivanjem odgovarajuće pisane norme.

F.2.4.3 Upravljane veličine

Mjerenja se često provode u upravljanim referentnim uvjetima za koje se pretpostavlja da ostaju stalni tijekom niza mjerenja. Npr., mjerenje se može izvoditi na uzorcima u uljnoj kupki čija se temperatura regulira termostatom. Temperatura kupke može se mjeriti za vrijeme svakog mjerenja na uzorku, ali ako se temperatura te kupke mijenja ciklično, trenutačna temperatura uzorka ne mora biti temperatura koju pokazuje toplomjer u kupki. Izračun fluktuacija temperature uzorka i njihove varijancije na temelju teorije prijenosa topline izlazi iz okvira ovih *uputa*, ali taj izračun mora polaziti od poznatoga ili pretpostavljenoga temperaturnog ciklusa za kupku. Taj ciklus može se opažati osjetljivim termoparom i temperaturnim pisačem, ali se i bez takvog opažanja, iz poznavanja prirode upravljanja, može izvesti kakva aproksimacija temperaturnog ciklusa.

F.2.4.4 Asimetrične razdiobe mogućih vrijednosti

Postoje slučajevi kad sve moguće vrijednosti koje veličine leže na jednoj strani jedne granične vrijednosti. Npr., kad se mjeri čvrsta okomita visina h (mjerena veličina) stupca kapljevine u manometru, os uređaja za mjerenje visine može odstupati od okomice za mali kut β. Duljina l određena tim uređajem bit će uvijek veća od h (vrijednosti manje od h nisu moguće). Razlog je tomu taj što je visina h jednaka projekciji $l\cos\beta$, što povlači da je $l = h/\cos\beta$, a sve vrijednosti $\cos\beta$ manje su od jedan i nije moguća nijedna vrijednost veća od jedan. Ta se tzv. "kosinusna pogrješka" može također pojavljivati na takav način da projekcija $h'\cos\beta$ mjerene veličine h' bude jednaka opažanoj duljini l, tj. $l = h'\cos\beta$ te da ta opažana duljina bude uvijek *manja* od mjerene veličine.

Ako se uvede nova varijabla, $\delta = 1 - \cos\beta$, uz pretpostavku da je $\beta \approx 0$ ili $\delta << 1$, što je obično u praksi slučaj, te dvije različite situacije daju:

$$h = \bar{l}(1 - \delta) \tag{F.3a}$$

$$h' = \bar{l}(1 + \delta) \tag{F.3b}$$

Ovdje je $\bar{l}$ (najbolja procjena veličine l) aritmetička sredina ili prosjek n neovisnih opetovanih opažanja l_k veličine l s procijenjenom varijancijom $u^2(\bar{l})$ [vidi jednadžbe (3) i (5) u podtočki 4.2]. Iz jednačaba (F.3a) i (F.3b), prema tomu, slijedi da je za dobivanje procjene h ili h' potrebno odrediti procjenu faktora ispravka δ, a za dobivanje sastavljene standardne nesigurnosti procjene h ili h' procijenjenu varijanciju $u^2(\delta)$ faktora ispravka δ. Točnije rečeno, primjena jednadžbe (10) iz podtočke 5.1.2 na jednadžbe (F.3a) i (F.3b) daje redom za $u_c^2(h')$ i $u_c^2(h)$ (znakovi – i +):

$$u_c^2 = (1 \mp \delta)^2 u^2(\bar{l}) + \bar{l}^2 u^2(\delta) \tag{F.4a}$$

$$\approx u^2(\bar{l}) + \bar{l}^2 u^2(\delta) \tag{F.4b}$$

Da bi se dobile procjene očekivane vrijednosti i varijancije faktora ispravka δ, pretpostavlja se da je os uređaja upotrijebljena za mjerenje visine stupca kapljevine u manometru čvrsto postavljena u okomitoj ravnini i da je razdioba vrijednosti kuta nagiba β oko očekivane ništične vrijednosti normalna razdioba s varijancijom σ^2. Premda β može imati i pozitivne i negativne vrijednosti, $\delta = 1 - \cos\beta$ ima pozitivnu vrijednost za sve vrijednosti β. Ako se pretpostavlja da kretanje osi tog uređaja nije ograničeno (određeno vezama), orijentacija osi može se mijenjati po prostornom kutu budući da se može razgoditi također i po azimutu, ali β je tada uvijek pozitivan kut.

U ograničenom ili jednodimenzijskom slučaju **element vjerojatnosti** $p(\beta)\mathrm{d}\beta$ (C.2.5, napomena) razmjeran je izrazu $\{\exp[(-\beta^2/\sigma^2)]\}\mathrm{d}\beta$, a u neograničenom ili dvodimenzijskom slučaju izrazu $\{\exp[(-\beta^2/\sigma^2)]\}\sin\beta\,\mathrm{d}\beta$. U dva navedena slučaja za određivanje očekivanja i varijancije faktora ispravka δ za primjenu u jednadžbama (F.3) i (F.4) zahtijevaju se izrazi za funkciju gustoće vjerojatnosti $p(\delta)$. Oni se mogu lako dobiti iz tih elemenata vjerojatnosti jer se za kut β može pretpostaviti da je malen, pa se, prema tomu, $\delta = 1 - \cos\beta$ i $\sin\beta$ mogu razviti u red potencija po β tako da se zadrže samo članovi najnižeg reda. To daje $\delta \approx \beta^2/2$, $\sin\beta \approx \beta = \sqrt{2\delta}$ i $\mathrm{d}\beta = \mathrm{d}\delta/\sqrt{2\delta}$. Funkcije gustoće vjerojatnosti faktora ispravka β tada su:

$$p(\delta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi\delta}}\exp(-\delta/\sigma^2) \tag{F.5a}$$

u jednoj dimenziji

$$p(\delta) = \frac{1}{\sigma^2}\exp(-\delta/\sigma^2) \tag{F.5b}$$

u dvije dimenzije

gdje je:

$$\int_0^\infty p(\delta)\mathrm{d}\delta = 1$$

Jednadžba (F.5a) i (F.5b), koje pokazuju da je najvjerojatnije vrijednost faktora ispravka u oba slučaja jednaka ništici, daju za očekivanje i varijanciju faktora ispravka δ u jednodimenzijskom slučaju $E(\delta) = \sigma^2/2$ i $\mathrm{var}(\delta) = \sigma^4/2$, a u dvodimenzijskom slučaju $E(\delta) = \sigma^2$ i $\mathrm{var}(\delta) = \sigma^4$. Jednadžbe (F.3a), (F.3b) i (F.4b) postaju tada:

$$h = \bar{l}\,[1 - (d/2)u^2(\beta)] \tag{F.6a}$$

$$h' = \bar{l}\,[1 + (d/2)u^2(\beta)] \tag{F.6b}$$

$$u_c^2(h) = u_c^2(h') = u^2(\bar{l}) + (d/2)\bar{l}^2u^4(\beta) \tag{F.6c}$$

gdje je d dimenzija (d = 1 ili 2), a $u(\beta)$ standardna nesigurnost kuta β, za koju se uzima da je jednaka najboljoj procjeni standardnog odstupanja σ pretpostavljene normalne razdiobe, a određuje se iz dostupnih podataka koji se odnose na mjerni proces (određivanje B-vrste). To je primjer slučaja gdje procjena vrijednosti mjerene veličine ovisi o *nesigurnosti* ulazne veličine.

Premda su jednadžbe (F.6a) i (F.6c) svojstvene normalnoj razdiobi, ta se analiza može provesti i uz pretpostavku drugih razdioba za kut β. Npr., ako se za β pretpostavi simetrična pravokutna razdioba s gornjom granicom $+\beta_0$ i donjom granicom $-\beta_0$ u jednodimenzijskom slučaju, a pravokutna razdioba s gornjom granicom $+\beta_0$ i donjom granicom jednakom ništici u dvodimenzijskom slučaju, tada će u jednodimenzijskom slučaju očekivanje i varijancija faktora ispravka biti $E(\delta) = \beta_0^2/6$ i $\mathrm{var}(\delta) = \beta_0^4/45$, a u dvodimenzijskom slučaju $E(\delta) = \beta_0^2/4$ i $\mathrm{var}(\delta) = \beta_0^2/48$.

NAPOMENA: To je slučaj gdje je razvoj funkcije $Y = f(X_1, X_2, ..., X_N)$ u Taylorov red uz zadržavanje samo članova prvog reda, zbog nelinearnosti funkcije f: $\cos\beta \neq \cos\bar{\beta}$. (vidi napomenu 2. iz podtočke 5.1.2 i podtočku H.2.4), neprikladan da bi se dobila nesigurnost $u_c^2(y)$ [jednadžba (10) iz podtočke 5.1.2]. Premda se ta analiza može u cijelosti provesti s pomoću varijable β, uvođenje varijable δ pojednostavnjuje zadatak.

Drugi primjer situacije gdje sve moguće vrijednosti kakve veličine leže na jednoj strani jedne granične vrijednosti titracijsko je određivanje koncentracije kakve sastavnice u otopini gdje se krajnja točka pokazuje okidanjem signala; iznos dodanog reagensa uvijek je veći nego što je nužno za okidanje signala; nikad nije manji. Suvišni titrator izvan granične točke zahtijevana je varijabla u redukciji podataka, a postupak je da se u tom (i sličnim) slučajevima pretpostavi odgovarajuća razdioba vjerojatnosti za suvišak i njezinu uporabu kako bi se dobila očekivana vrijednost i varijancija tog suviška.

PRIMJER: Ako se za pravokutnu razdiobu s donjom ništičnom granicom i gornjom granicom C_0 pretpostavlja suvišak z, tada je očekivana vrijednost suviška jednaka $C_0/2$ s pridruženom varijancijom $C_0^2/12$. Ako se kao funkcija gustoće vjerojatnosti tog suviška uzme normalna razdioba s $0 \leq z < \infty$, tj. $p(z) = (\sigma\sqrt{\pi/2})^{-1}\exp(-z^2/2\sigma^2)$, tada je očekivana vrijednost jednaka $\sigma\sqrt{2/\pi}$ s varijancijom $\sigma^2(1 - 2/\pi)$.

F.2.4.5 Nesigurnost kad ispravci zbog krivulje umjeravanja nisu primijenjeni

U napomeni iz podtočke 6.3.1 razmatran je slučaj kad se poznati ispravak b, koji je proveden zbog značajnoga sustavnog djelovanja, ne primjenjuje na iskazani mjerni rezultat već se umjesto toga uzima u obzir povećanjem "nesigurnosti" pridijeljene rezultatu. Primjer za to zamjena je povećane nesigurnosti U s povećanom nesigurnošću $U + b$, gdje je U povećana nesigurnost dobivena pod pretpostavkom da je $b = 0$. Ta se praksa katkad provodi u slučajevima gdje vrijede svi ovi uvjeti: mjerena veličina Y određena je u području vrijednosti parametra t, kao u slučaju krivulje umjeravanja temperaturnog osjetila; povećana nesigurnost U i faktor ispravka b također ovise o t; a za sve procjene $y(t)$ mjerene veličine u području mogućih vrijednosti parametra t treba dati samo jednu vrijednost "nesigurnosti". U takvim slučajevima mjerni se rezultat često navodi kao $Y(t) = y(t) \pm [U_{max} + b_{max}]$, gdje indeks "max" pokazuje da se primjenjuje najveća vrijednost povećane nesigurnosti U i najveća vrijednost poznatog ispravka b u razmatranom području vrijednosti parametra t.

Premda ove *upute* preporučuju da se na mjerne rezultate primjenjuju ispravci zbog poznatih značajnih sustavnih djelovanja, to ne mora uvijek biti izvodivo u određenim situacijama za svaku vrijednost procjene $y(t)$ zbog neprihvatljivih troškova koji bi nastali u izračunu i primjeni pojedinih ispravaka i u izračunu i primjeni pojedinih nesigurnosti.

Razmjerno jednostavan pristup tom problemu koji je u skladu s načelima ovih *uputa* jest ovaj:

Izračunati *jednu* srednju vrijednost ispravka $\overline{b}$ iz izraza:

$$\overline{b} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} b(t)\mathrm{d}t \tag{F.7a}$$

gdje t_1 i t_2 određuju razmatrano područje parametra t, i uzeti da je najbolja procjena mjernog rezultata $Y(t)$ jednaka $y'(t) = y(t) \pm \overline{b}$, gdje je $y(t)$ najbolja neispravljena procjena mjernog rezultata $Y(t)$. Varijancija pridružena srednjoj vrijednosti ispravka $\overline{b}$ u razmatranom području dana je izrazom:

$$u^2(\overline{b}) = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} [b(t) - \overline{b}]^2\,\mathrm{d}t \tag{F.7b}$$

koji ne uzima u obzir nesigurnost stvarnog smisla ispravka $b(t)$. Srednja vrijednost varijancije ispravka $b(t)$ koja odgovara njezinu stvarnom smislu dana je izrazom:

$$\overline{u^2[b(t)]} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} u^2[b(t)]\,\mathrm{d}t \tag{F.7c}$$

gdje je $u^2[b(t)]$ varijancija ispravka $b(t)$. Slično tomu, srednja vrijednost varijancije procjene $y(t)$ koja potječe od svih izvora nesigurnosti različitih od ispravka $b(t)$ dobiva se iz izraza:

$$\overline{u^2[y(t)]} = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} u^2[y(t)]\,\mathrm{d}t \tag{F.7d}$$

gdje je $u^2[y(t)]$ varijancija veličine $y(t)$ nastala zbog svih izvora nesigurnosti različitih od $b(t)$. Pozitivni drugi korijen izraza:

$$u_c^2(y') = \overline{u^2[y(t)]} + \overline{u^2[b(t)]} + u^2(\overline{b}) \tag{F.7e}$$

tada je jedina vrijednost standardne nesigurnosti koju treba uzeti za sve procjene $y'(t) = y(t) + \overline{b}$ mjerene veličine $y(t)$. Povećana nesigurnost U može se dobiti množenjem $u_c(y')$ s prikladno odabranim faktorom pokrivanja k, $U = ku_c(y')$, što daje $Y(t) = y'(t) \pm U = y(t) + \overline{b} \pm U$. Međutim, mora se utvrditi uporaba istog prosječnog ispravka za sve vrijednosti t, a ne ispravka prikladnog za svaku vrijednost parametra t te se mora dati jasan iskaz o tome što U prikazuje.

F.2.5 Nesigurnost mjerne metode

F.2.5.1 Možda je najteže odrediti sastavnicu nesigurnosti koja je pridružena mjernoj metodi, posebno ako se pokazalo da primjena te metode daje rezultate s manjom promjenljivosti nego bilo koja druga poznata metoda. Međutim, vjerojatno postoje druge metode, neke od njih još dosad nisu poznate ili su na neki način nepraktične, koje bi dale sustavno različite rezultate očigledno iste valjanosti. To podrazumijeva *apriornu* razdiobu vjerojatnosti, a ne razdiobu iz koje se uzorci mogu lako izvlačiti i statistički obrađivati. Na taj način, čak i ako je nesigurnost mjerne metode možda prevladavajuća sastavnica mjerne nesigurnosti, često je jedina obavijest koja je dostupna za određivanje njezine standardne nesigurnosti postojeće poznavanje fizičkog svijeta (vidi također podtočku E.4.4).

NAPOMENA: Određivanje iste mjerene veličine različitim metodama u istom laboratoriju ili u različitim laboratorijima ili istom mjernom metodom u različitim laboratorijima može često dati vrijedne podatke o nesigurnosti koja se može pridružiti kojoj posebnoj metodi. Općenito, za neovisnost mjerenja koristan način procjene pouzdanosti određivanja vrijednosti nesigurnosti te utvrđivanja ranije neutvrđenih sustavnih djelovanja jest razmjena mjernih etalona ili referentnih tvari među laboratorijima.

F.2.6 Nesigurnost uzorka

F.2.6.1 U mnogim mjerenjima zahtijeva se uspoređivanje nepoznatog objekta s poznatim etalonom koji ima slične značajke da bi se umjerio taj nepoznati objekt. Kao primjer služe granične mjerke, određeni toplomjeri, garniture utega, otpornici i tvari visoke čistoće. U većini takvih slučajeva mjerne metode nisu posebno osjetljive na izbor uzorka (tj. posebnoga nepoznatog objekta koji se umjerava), obradbu uzorka ili učinke različitih vanjskih utjecajnih veličina jer nepoznati objekt i etalon reagiraju općenito na isti (i često predvidiv) način na djelovanje takvih varijabla.

F.2.6.2 U nekim praktičnim mjernim situacijama uzorkovanje i obradba uzorka igraju mnogo veću ulogu. To je često slučaj za kemijske analize prirodnih tvari. Za razliku od umjetnih tvari, koje mogu imati dokazanu istorodnost iznad razine koja se zahtijeva za mjerenje, prirodne su tvari često veoma neistorodne. Ta neistorodnost dovodi do dviju dodatnih sastavnica nesigurnosti. Za određivanje prve sastavnice nesigurnosti potrebno je odrediti kako primjereno izabrani uzorak predstavlja izvornu tvar koja se analizira. Za izračun druge sastavnice nesigurnosti potrebno je odrediti u kojoj mjeri druge (neanalizirane) sastavnice utječu na mjerenje i kako se primjereno one obrađuju tom mjernom metodom.

F.2.6.3 U nekim slučajevima brižan plan pokusa može omogućiti da se statistički odredi nesigurnost koja se pripisuje uzorku (vidi podtočke H.5 i H.5.3.2). Obično, međutim, posebno kad su djelovanja vanjskih utjecajnih veličina na uzorak znatna, za određivanje nesigurnosti potrebni su vježba i znanje analitičara izvedeno iz iskustva te svi trenutačno dostupni podatci.

Dodatak G

Brojevi stupnjeva slobode i razine povjerenja

G.1 Uvod

G.1.1 Ovaj je dodatak usmjeren na opće pitanje dobivanja, iz procjene y mjerene veličine Y i sastavljene nesigurnosti $u_c(y)$ te procjene, povećane nesigurnosti $U_p = k_p u_c(y)$ koja određuje interval $y - U_p \leq Y \leq y + U_p$ koji ima visoku, specificiranu vjerojatnost pokrivanja ili razinu povjerenja p. On dakle obrađuje pitanje određivanja faktora pokrivanja k_p koji tvori interval oko mjernog rezultata y za koji se može očekivati da obuhvaća velik, specificirani udio p razdiobe vrijednosti koje bi se opravdano mogle pripisati mjerenoj veličini Y (vidi točku 6).

G.1.2 U većini praktičnih mjernih slučajeva izračun intervala koji imaju specificirane razine povjerenja (čak procjena većine pojedinačnih sastavnica nesigurnosti u takvim slučajevima) u najboljem slučaju samo je aproksimacija. Čak i eksperimentalno standardno odstupanje srednje vrijednosti od 30 opetovanih opažanja veličine opisane normalnom razdiobom samo ima nesigurnost od oko 13 posto (vidi tablicu E.1 u dodatku E).

U većini slučajeva nema smisla pokušavati praviti razliku između npr. intervala koji ima razinu povjerenja od 95 posto (vjerojatnost da vrijednost mjerene veličine Y leži izvan tog intervala jedan je prema dvadeset) ili intervala s razinom povjerenja od 94 posto ili 96 posto (s vjerojatnostima da vrijednost mjerene veličine leži izvan tog intervala jednakim redom 1 prema 17 i 1 prema 25). Posebno je teško dobivanje intervala s razinama povjerenja od 99 posto (vjerojatnost da vrijednost mjerene veličine leži izvan tog intervala jednaka je 1 prema 100) i većim čija bi se točnost mogla braniti, čak i ako se pretpostavlja da nije predviđeno nikakvo sustavno djelovanje, jer je općenito dostupno veoma malo podataka o krajnjim dijelovima ili "repovima" razdioba vjerojatnosti ulaznih veličina.

G.1.3 Da bi se dobila vrijednost faktora pokrivanja k_p koji daje interval koji odgovara specificiranoj razini povjerenja p, zahtijeva se iscrpno poznavanje razdiobe vjerojatnosti koju opisuje mjerni rezultat i njegova sastavljena standardna nesigurnost. Npr., za veličinu z opisanu normalnom razdiobom s očekivanjem μ_z i standardnim odstupanjem σ lako se može izračunati vrijednost faktora pokrivanja k_p koja daje interval $\mu_z \pm k_p\sigma$ koji obuhvaća dio p te razdiobe i prema tomu ima vjerojatnost pokrivanja ili razinu povjerenja p. U tablici G.1 dano je nekoliko primjera vrijednosti faktora pokrivanja i pripadne razine povjerenja za normalnu razdiobu.

Tablica G.1: Vrijednost faktora pokrivanja k_p koji uz pretpostavku normalne razdiobe daje interval povjerenja koji ima razinu povjerenja p

Razina povjerenja p (posto)	**Faktor pokrivanja k_p**
68,27	1
90	1,645
95	1,960
95,45	2
99	2,576
99,73	3

NAPOMENA: Nasuprot tomu, ako se veličina z opisuje pravokutnom razdiobom s očekivanjem μ_z i standardnim odstupanjem $\sigma = a/\sqrt{3}$, gdje je a poluširina te razdiobe, razina povjerenja p jednaka je 57,74 posto za $k_p = 1$; 95 posto za $k_p = 1{,}65$; 99 posto za $k_p = 1{,}71$ i 100 posto za $k_p \geq \sqrt{3} \approx 1{,}73$. Pravokutna razdioba je "uža" od normalne razdiobe u tom smislu da ima konačnu širinu i da nema "repova".

G.1.4 Ako su poznate razdiobe vjerojatnosti ulaznih veličina $X_1, X_2, ..., X_N$ o kojima ovisi mjerena veličina Y [njihova očekivanja i varijancije, a ako te razdiobe nisu normalne i njihovi momenti višeg reda (vidi podtočke C.2.13 i C.2.22)] i ako je Y linearna funkcija tih ulaznih veličina $Y = c_1X_1 + c_2X_2 + ... + c_NX_N$, razdioba vjerojatnosti veličine Y' tada se može dobiti konvolucijom tih pojedinačnih razdioba vjerojatnosti [10]. Vrijednost faktora pokrivanja k_p koji daje intervale koji odgovaraju specificiranim razinama povjerenja p, mogu se tada izračunati iz konačne konvolucijom dobivene razdiobe.

G.1.5 Ako je funkcijski odnos između Y i njezinih ulaznih veličina nelinearan, a razvoj te funkcije u Taylorov red uz zadržavanje samo prvih članova razvoja nije prihvatljiva aproksimacija (vidi podtočke 5.1.2 i 5.1.5), razdioba vjerojatnosti izlazne veličine Y ne može se dobiti konvolucijom razdioba ulaznih veličina. U takvim slučajevima zahtijevaju se druge analitičke ili numeričke metode.

G.1.6 Budući da su parametri koji opisuju razdiobe vjerojatnosti ulaznih veličina obično procjene i budući da je nerealno očekivati da razina povjerenja pridružena danom intervalu može biti poznata s velikom točnošću te zbog složenosti postupka tvorbe konvolucije razdioba vjerojatnosti, u praksi se, kad se trebaju izračunati intervali koji imaju specificirane razine povjerenja, takve konvolucije rijetko ili uopće ne primjenjuju. Umjesto toga upotrebljavaju se aproksimacije u kojima se rabi središnji granični teorem.

G.2 Središnji granični teorem

G.2.1 Ako je $Y = c_1X_1 + c_2X_2 + ... + c_NX_N = \sum_{i=1}^{N} c_iX_i$ i ako se sve veličine X_i opisuju normalnim razdiobama, i konačna konvolucijom dobivena razdioba veličine Y bit će također normalna. Međutim, čak i ako razdiobe veličina X_i nisu normalne, razdioba veličine Y može se, zbog središnjega graničnog teorema, često aproksimirati normalnom razdiobom. Taj teorem tvrdi da će razdioba veličine Y biti *približno normalna* s očekivanjem $E(Y) = \sum_{i=1}^{N} c_iE(X_i)$ i varijancijom $\sigma^2(Y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2\sigma^2(X_i)$ gdje je $E(X_i)$, očekivanje veličine X_i, a $\sigma^2(X_i)$ varijancija veličine X_i, ako su veličine X_i neovisne i ako je varijancija $\sigma^2(Y)$ mnogo veća od svake pojedinačne sastavnice $c_i^2\sigma^2(X_i)$ nenormalno raspodijeljene veličine X_i.

G.2.2 Središnji je granični teorem važan jer pokazuje veoma važnu ulogu koju u određivanju oblika konačne konvolucijom dobivene razdiobe veličine Y igraju varijancije razdioba vjerojatnosti ulaznih veličina u usporedbi s ulogom koju igraju viši momenti tih razdioba. Nadalje, on povlači za sobom da konvolucijom dobivena razdioba teži prema normalnoj razdiobi kad broj ulaznih veličina koje doprinose vrijednosti varijancije $\sigma^2(Y)$ raste, da će ta konvergencija biti to brža što su vrijednosti $c_i^2\sigma^2(X_i)$ bliže jedna drugoj (što je u praksi istovjetno da svaka procjena ulazne veličine x_i s razmjerno istom nesigurnošću doprinosi nesigurnosti procjene y mjerene veličine Y) te što su razdiobe veličina X_i bliže normalnoj razdiobi traži se manji broj veličina X_i da bi se za veličinu Y dobila normalna razdioba.

PRIMJER: Pravokutna je razdioba (vidi podtočke 4.3.7 i 4.4.5) krajnji primjer nenormalne razdiobe, ali je konvolucija već *triju* takvih razdioba iste širine približno normalna. Ako je poluširina svake od tih triju pravokutnih razdioba jednaka a, tako da je varijancija svake od njih jednaka $a^2/3$, varijancija konvolucijom dobivene razdiobe jednaka je $\sigma^2 = a^2$. Intervali konvolucijom dobivene razdiobe s razinom povjerenja 95 i 99 posto određuju se redom izrazima $1{,}937\sigma$ i $2{,}379\sigma$, dok se odgovarajući intervali za normalnu razdiobu s istim standardnim odstupanjem σ određuju s pomoću izraza $1{,}960\sigma$ i $2{,}576\sigma$ (vidi tablicu G.1) [10].

NAPOMENE:

1. Za svaki interval s razinom povjerenja p većom od oko 91,7 posto, vrijednost faktora pokrivanja k_p za normalnu razdiobu veća je od odgovarajuće vrijednosti faktora pokrivanja za razdiobu koja se dobije kao rezultat konvolucije pravokutnih razdioba bilo kojeg broja i veličine.

2. Iz središnjega graničnoga teorema izlazi da se razdioba vjerojatnosti aritmetičke sredine $\overline{q}$ dobivene iz n opažanja q_k slučajne varijable q s očekivanjem μ_q i konačnim standardnim odstupanjem $\sigma/\sqrt{n}$ kad $n \to \infty$ približuje normalnoj razdiobi sa srednjom vrijednošću μ_q i standardnim odstupanjem $s/\sqrt{n}$, bez obzira kakva bila razdioba vjerojatnosti veličine q.

G.2.3 Praktična je posljedica središnjega graničnoga teorema, kad su njegovi zahtjevi približno ispunjeni, posebno ako u sastavljenoj standardnoj nesigurnosti $u_c(y)$ ne prevladava koja sastavnica standardne nesigurnosti dobivena određivanjem A-vrste, koja se temelji na samo nekoliko opažanja, ili koja sastavnica standardne nesigurnosti dobivena određivanjem B-vrste, koja se temelji na pretpostavljenoj pravokutnoj razdiobi da je za izračun povećane nesigurnosti $U_p = k_p u_c(y)$, koja daje interval s razinom povjerenja p, uporaba vrijednosti iz normalne razdiobe za faktor pokrivanja k_p, opravdano prvo približenje. U tablici G.1 dane su vrijednosti koje se najčešće upotrebljavaju u tu svrhu.

G.3 *t*-razdioba i broj stupnjeva slobode

G.3.1 Da bi se dobila bolja aproksimacija nego jednostavnom uporabom za k_p vrijednosti iz koje normalne razdiobe kao u podtočki G.2.3, mora se uočiti da je za izračun kojeg intervala koji ima određenu razinu povjerenja potrebna ne razdioba varijable $[Y - E(Y)] / \sigma(Y)$ nego razdioba varijable $(y - Y) / u_c(y)$. To je zato jer sve što je u praksi moguće upotrijebiti jesu y, procjena veličine Y dobivena iz izraza $y = \sum_{i=1}^{N} c_i x_i$, gdje je x_i procjena veličine X_i i sastavljena varijancija $u_c^2(y)$ pridružena procjeni y izračunana iz izraza $u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i)$, gdje je $u(x_i)$ standardna nesigurnost (procijenjeno standardno odstupanje) procjene x_i.

NAPOMENA: Strogo govoreći, u izrazu $(y - Y)/u_c(y)$ Y bi se trebalo čitati kao $E(Y)$. Zbog jednostavnosti takvo razlikovanje u ovim *uputama* provodi se samo na nekoliko mjesta. Općenito, isti se znak upotrebljava za fizičku veličinu, slučajnu varijablu koja predstavlja tu veličinu i očekivanje te varijable (vidi podtočku 4.1.1, napomene).

G.3.2 Ako je z normalno raspodijeljena slučajna varijabla s očekivanjem μ_z i standardnim odstupanjem σ, a $\bar{z}$ aritmetička sredina n neovisnih opažanja z_k veličine z sa $s(\bar{z})$, eksperimentalnim standardnim odstupanjem srednje vrijednosti $\bar{z}$ [vidi jednadžbe (3) i (5) u 4.2], razdioba varijable $t = (\bar{z} - \mu_z)/s(\bar{z})$ tada je jednaka *t*-**razdiobi** ili **Studentovoj razdiobi** (C.3.8) s $v = n - 1$ stupnjeva slobode.

Dakle, ako je mjerena veličina Y jednostavno jedna normalno raspodijeljena veličina X, $Y = X$, i ako se veličina X procjenjuje s pomoću aritmetičke sredine $\bar{X}$ od n neovisnih opetovanih opažanja X_k veličine X s eksperimentalnim standardnim odstupanjem srednje vrijednosti $s(\bar{X})$, tada je $y = X$ najbolja procjena veličine Y, a eksperimentalno standardno odstupanje te procjene jednako je $u_c(y) = s(\bar{X})$. Veličina $t = (\bar{z} - \mu_z)/s(\bar{z}) = (\bar{X} - X)/s(\bar{X}) = (y - Y)/u_c(y)$ tada je raspodijeljena u skladu s *t*-razdiobom s:

$$\Pr[-t_p(\nu) \leq t \leq t_p(\nu)] = p \tag{G.1a}$$

ili

$$\Pr[-t_p(\nu) \leq (y - Y) / u_c(y) \leq t_p(\nu)] = p \tag{G.1b}$$

što se drukčije može napisati kao

$$\Pr[y - t_p(\nu)u_c(y) \leq Y \leq y + t_p(\nu)u_c(y)] = p \tag{G.1c}$$

U ovim izrazima Pr [ ] znači "vjerojatnost da je", a *t*-faktor $t_p(\nu)$ vrijednost je veličine t za danu vrijednost parametra ν [broj stupnjeva slobode (vidi podtočku G.3.3)] takva da je intervalom od $-t_p(\nu$ do $+ t_p(\nu)$ obuhvaćen dio p *t*-razdiobe. Na taj način povećana nesigurnost:

$$U_p = k_p u_c(y) = t_p(\nu)u_c(y) \tag{G.1d}$$

određuje interval od $y - U_p$ do $y + U_p$, što je prikladno pisati kao $Y = y \pm U_p$, za koji se može očekivati da obuhvaća udio p razdiobe vrijednosti koje bi se opravdano mogle pripisati veličini Y, a p je vjerojatnost pokrivanja ili razina povjerenja za taj interval.

G.3.3 Za pojedinu veličinu procijenjenu s pomoću aritmetičke sredine od ν neovisnih opažanja kao u podtočki G.3.2 broj stupnjeva slobode jednak je $n - 1$. Ako se za određivanje nagiba i presjeka pravca metodom najmanjih kvadrata rabi n neovisnih opažanja, broj stupnjeva slobode njihove standardne nesigurnosti jednak je $\nu = n - 2$. Za prilagođenje m parametara podatcima koji su prikazani s n točaka metodom najmanjih kvadrata broj stupnjeva slobode standardne nesigurnosti svakog parametra jednak je $\nu = n - m$. (Za daljnju raspravu o brojevima stupnjeva slobode vidi uputnicu [15]).

G.3.4 U tablici G.2 na kraju ovoga dodatka za različite vrijednosti broja stupnjeva slobode ν i različite vrijednosti vjerojatnosti pokrivanja p dane su odabrane vrijednosti $t_p(\nu) \approx (1+2/\nu)^{1/2}k_p$. Kad $\nu \to \infty$ t-razdioba se približuje normalnoj razdiobi, a $t_p(\nu) \approx (1 + 2/\nu)^{1/2}k_p$; u tom izrazu k_p je faktor povjerenja koji je potreban da se za normalno raspodijeljenu varijablu dobije interval s razinom povjerenja p. Prema tomu, vrijednost $t_p(\infty)$ za dano p u tablici G.2 jednaka je vrijednosti k_p za isto p u tablici G.1.

NAPOMENA: Često se t-razdiobe daju u tablicama s pomoću kvantila; tj. daju se vrijednosti kvantila $t_{1-\alpha}$ gdje $1-\alpha$ označuje ukupnu vjerojatnost, a odnos:

$$1 - \alpha = \int_{-\infty}^{t_{1-\alpha}} f(t, \nu)\, \mathrm{d}t$$

određuje kvantil, gdje je f funkcija gustoće vjerojatnosti varijable t. Na taj su način t_p i $t_{1-\alpha}$ povezani izrazom $p = 1 - 2\alpha$. Za vrijednost kvantila $t_{0,975}$ za koju je $1 - \alpha = 0,975$ i $\alpha = 0,025$ ista je kao $t_p(\nu)$ za $p = 0,95$.

G.4 Stvarni broj stupnjeva slobode

G.4.1 Općenito t-razdioba neće opisivati razdiobu varijable $(y - Y)/u_c(y)$ ako je $u_c^2(y)$ zbroj dviju ili više procijenjenih sastavnica varijancije $u_c^2(y) = c_i^2 u^2(x_i)$ (vidi podtočku 5.1.3), čak i ako je svako x_i procjena normalno raspodijeljene ulazne veličine X_i. Međutim, razdioba te varijable može se aproksimirati t-razdiobom sa *stvarnim* brojem stupnjeva slobode ν_{eff} dobivenim iz Welch-Satterthwaiteove formule [16, 17, 18]:

$$\frac{u_c^4(y)}{\nu_{\mathrm{eff}}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^4(y)}{\nu_i} \tag{G.2a}$$

ili

$$\nu_{\mathrm{eff}} = \frac{u_c^4(y)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}} \tag{G.2b}$$

s

$$\nu_{\mathrm{eff}} \leq \sum_{i=1}^{N} \nu_i \tag{G.2c}$$

gdje je $u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} u_i^2(y)$ (vidi podtočku 5.1.3). Povećana nesigurnost $U_p = k_p u_c(y) = t_p(\nu_{\mathrm{eff}})u_c(y)$ tada daje interval $Y = y \pm U_p$ koji ima približnu razinu povjerenja p.

NAPOMENE:

1. Ako vrijednost za stvarni broj stupnjeva slobode ν_{eff} dobivena iz jednadžbe (G.2b), nije cijeli broj, što će obično biti slučaj u praksi, odgovarajuća vrijednost faktora t_p može se naći iz tablice G.2 interpolacijom ili zaokruživanjem ν_{eff} na prvi manji cijeli broj.

2. Ako se procjena x_i ulazne veličine X_i samo dobiva iz dviju ili više procjena drugih veličina, tada je vrijednost broja stupnjeva slobode ν_i koju treba upotrijebiti uz $u_i^4(y) = [c_i^2 u^2(x_i)]^2$ u nazivniku jednadžbe (G.2b) jednaka stvarnom broju stupnjeva slobode izračunanom iz izraza istovjetnoga jednadžbi (G.2b).

3. Ovisno o potrebama mogućih korisnika mjernog rezultata, može biti korisno osim stvarnoga broja stupnjeva slobode ν_{eff} također izračunavati i iskazivati vrijednosti za ν_{effA} i ν_{effB} izračunane iz jednadžbe (G.2b) koja odvojeno obrađuje standardne nesigurnosti dobivene određivanjem A-vrste i B-vrste. Ako se ti doprinosi sastavljenoj standardnoj nesigurnosti $u_c^2(y)$ od standardnih nesigurnosti A-vrste i B-vrste sami označe redom s $u_{cA}^2(y)$ i $u_{cB}^2(y)$, te različite veličine bit će povezane izrazima:

$$u_c^2(y) = u_{cA}^2(y) + u_{cB}^2(y)$$

$$\frac{u_c^4(y)}{\nu_{\mathrm{eff}}} = \frac{u_{cA}^4(y)}{\nu_{\mathrm{effA}}} + \frac{u_{cB}^4(y)}{\nu_{\mathrm{effB}}}$$

PRIMJER: Uzmimo da je $Y = f(X_1, X_2, X_3) = bX_1X_2X_3$ i da su procjene x_1, x_2, x_3 normalno raspodijeljenih ulaznih veličina X_1, X_2, X_3 aritmetičke sredine redom dobivene iz $n_1 = 10$, $n_2 = 5$ *i* $n_3 = 15$ neovisnih opetovanih opažanja s relativnim standardnim nesigurnostima $u(x_1)/x_1 = 0{,}25$ posto, $u(x_2)/x_2 = 0{,}57$ posto i $u(x_3)/x_3 = 0{,}82$ posto. U tom slučaju je $c_i = \partial f/\partial X_i = Y/X_i$ (trebaju se odrediti u vrijednostima procjena x_1, x_2, x_3 – vidi podtočku 5.13, napomenu 1.), $[u_c(y)/y]^2 = \sum_{i=1}^{3}[u(x_i)/x_i]^2 = (1{,}03 \text{ posto})^2$ (vidi napomenu 2. iz podtočke 5.1.6) i jednadžba (G.2b) postaje:

$$\nu_{\text{eff}} = \frac{[u_c(y)/y]^4}{\sum_{i=1}^{3}\frac{[u(x_i)/x_i]^4}{\nu_i}} \tag{G.2b}$$

Na taj je način:

$$\nu_{\text{eff}} = \frac{1{,}03^4}{\frac{0{,}25^4}{10-1} + \frac{0{,}57^4}{5-1} + \frac{0{,}82^4}{15-1}} = 19$$

Vrijednost kvantila t_p za $p = 95$ posto i $\nu = 19$ jednaka je, iz tablice G.2, $t_{95}(19) = 2{,}09$; prema tomu, relativna povećana nesigurnost za tu razinu povjerenja jednaka je $U_{95} = 2{,}09 \times (1{,}03 \text{ posto}) = 2{,}2$ posto. Može se dakle tvrditi da je $Y = y \pm U_{95} = y(1 \pm 0{,}022)$ (y treba odrediti iz izraza $y = bx_1x_2x_3$) ili da je $0{,}978y \le Y \le 1{,}022y$ te da je razina povjerenja koju treba pridružiti tom intervalu približno jednaka 95 posto.

G.4.2 U praksi $u_c(y)$ ovisi o standardnim nesigurnostima $u(x_i)$ procjena normalno i nenormalno raspodijeljenih ulaznih veličina, a nesigurnosti $u(x_i)$ dobivaju se iz razdioba vjerojatnosti utemeljenih na čestoći i *apriornih* razdioba vjerojatnosti (tj. određivanjem A-vrste i određivanja B-vrste). Slična se tvrdnja primjenjuje na procjenu y i procjene x_i ulaznih veličina o kojima y ovisi. Ipak se razdioba vjerojatnosti funkcije $t = (y - Y)/u_c(y)$ može aproksimirati t-razdiobom ako se ona razvije u Taylorov red oko svojega očekivanja. U biti, to je ono što se postiglo aproksimacijom najnižeg reda s pomoću Welch-Satterhwaiteove formule, jednadžba (G.2a) ili jednadžba (G.2b).

Postavlja se pitanje broja stupnjeva slobode koji treba pripisati standardnoj nesigurnosti dobivenoj određivanjem B-vrste kad se ν_{eff} izračunava iz jednadžbe (G.2b). Budući da odgovarajuća definicija broja stupnjeva slobode pretpostavlja da je ν, kako se pojavljuje u t-razdiobi, mjera nesigurnosti varijancije $s^2(\bar{z})$, jednadžba (E.7) u podtočki E.4.3 može se upotrijebiti za definiciju broja stupnjeva slobode ν_i:

$$\nu_i \approx \frac{1}{2}\frac{u^2(x_i)}{\sigma^2[u(x_i)]} \approx \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta u(x_i)}{u(x_i)}\right]^{-2} \tag{G.3}$$

Veličina u velikim zagradama relativna je nesigurnost nesigurnosti $u(x_i)$; za određivanje standardne nesigurnosti B-vrste to je subjektivna veličina čija se vrijednost dobiva znanstvenom prosudbom koja se temelji na skupu dostupnih podataka.

PRIMJERI: Uzmimo da znanje o tome kako je procjena x_i ulazne veličine određena i kako je određena njezina standardna nesigurnost $u(x_i)$ dovodi do procjene da je vrijednost standardne nesigurnosti $u(x_i)$ pouzdana oko 25 posto. To može značiti da je relativna nesigurnost jednaka $\Delta u(x_i)/u(x_i) = 0{,}25$, pa je prema tomu iz jednadžbe (G.3) $\nu_i = (0{,}25)^{-2}/2 = 8$. Ako se umjesto toga procijenilo da je vrijednost $u(x_i)$ pouzdana samo oko 50 posto, tada je $\nu_i = 2$. (vidi također tablicu E.1 u dodatku E).

G.4.3 U raspravi u podtočkama 4.3 i 4.4 o određivanju standardne nesigurnosti B-vrste iz *apriorne* razdiobe vjerojatnosti neizravno se pretpostavljalo da je vrijednost nesigurnosti $u(x_i)$ koja proizlazi i takvoga određivanja točno poznata. Npr., kad se standardna nesigurnost $u(x_i)$, kao u podtočkama 4.3.7 i 4.4.5, dobiva iz pravokutne razdiobe vjerojatnosti pretpostavljene poluširine $a = (a_+ - a_-)/2$, nesigurnost $u(x_i) = a/\sqrt{3}$ smatra se stalnicom bez nesigurnosti jer se a_+ i a_-, a, prema tomu, i a smatraju veličinama bez nesigurnosti (ali vidi podtočku 4.3.9, napomenu 2.). To preko izraza (G.3) povlači da $\nu_i \to \infty$ ili $1/\nu_i \to 0$, ali to ne uzrokuje poteškoće u izračunu izraza (G.2b). Nadalje, nije nužno nerealno pretpostavljati da $\nu_i \to \infty$; opća je praksa da se a_- i a_+ biraju tako da vjerojatnost da promatrana veličina leži izvan intervala od a_- do a_+ bude zanemarivo mala.

G.5 Druga razmatranja

G.5.1 U literaturi o mjernoj nesigurnosti često se nalazi i upotrebljava jedan izraz za dobivanje nesigurnosti kojem je svrha dati interval s razinom povjerenja od 95 posto, koji se može napisati kao:

$$U'_{95} = \left[t_{95}^2(\nu'_{\text{eff}})s^2 + 3u^2 \right]^{1/2} \tag{G.4}$$

Ovdje je faktor $t_{95}(\nu'_{\text{eff}})$ uzet iz t-razdiobe za broj stupnjeva slobode ν'_{eff} i razinu povjerenja $p = 95$ posto; ν'_{eff} stvarni je broj stupnjeva slobode izračunan iz Welch-Satterthwaiteove formule [jednadžba (G.2b)] uzimajući u obzir *samo* one sastavnice standardne nesigurnosti s_i koje su određene statistički iz opetovanih opažanja u *tekućem* mjerenju; $s^2 = \sum c_i^2 s_i^2$; $c_i \equiv \partial f/\partial x_i$; a *sve* druge sastavnice nesigurnosti uzete su u obzir u izrazu $u^2 = \sum u_j^2(y) = \sum c_j^2(a_j^2/3)$, gdje se pretpostavlja da su $+a_j$ i $-a_j$ točno poznata gornja i donja granica veličine X_j u odnosu na njezinu najbolju procjenu x_j (tj. $x_j - a_j \le X_j \le x_j + a_j$).

NAPOMENA: Sastavnica koja se temelji na opetovanim opažanjima provedenim *izvan* tekućeg mjerenja obrađuje se na isti način kao svaka druga sastavnica uključena u izraz za u^2. Prema tomu, da bi se provela smislena usporedba između jednadžbe (G.4) i jednadžbe (G.5) iz iduće podtočke, pretpostavlja se da su takve sastavnice, ako postoje, zanemarive.

G.5.2 Ako se povećana nesigurnost koja daje interval s razinom povjerenja od 95 posto određuje u skladu s metodama preporučenim u podtočkama G.3 i G.4, umjesto izraza (G.4) konačni će izraz za povećanu nesigurnost biti:

$$U_{95} = t_{95}(\nu_{\text{eff}})(s^2 + u^2)^{1/2} \tag{G.5}$$

gdje je stvarni broj stupnjeva slobode ν_{eff} izračunan iz izraza (G.2b), a u njegov su izračun uključene *sve* sastavnice nesigurnosti.

U većini slučajeva, ako se pretpostavi da su u izračunu jednadžbe (G.5) sve varijancije B-vrste dobivene iz *apriornih* pravokutnih razdioba s poluširinama koje su jednake granicama a_j upotrijebljenim za izračun u^2 iz jednadžbe (G.4), vrijednost U_{95} iz jednadžbe (G.5) bit će veća od vrijednosti U'_{95} iz jednadžbe (G.4). To se može objasniti ako se uzme u obzir da oba faktora imaju vrijednosti približno jednake 2, iako će vrijednost faktora $t_{95}(\nu'_{\text{eff}})$ u većini slučajeva biti nešto veća od vrijednosti faktora $t_{95}(\nu_{\text{eff}})$, a u izrazu (G.5) veličina u^2 množi se faktorom $t_p^2(\nu_{\text{eff}}) \approx 4$, dok se u izrazu (G.4) množi faktorom 3. Premda ta dva izraza daju iste vrijednosti za U'_{95} i U_{95} za slučaj $u^2 << s^2$, za slučaj $u^2 >> s^2$ vrijednost za U'_{95} bit će gotovo 13 posto manja od vrijednosti za U_{95}. Prema tomu, općenito izraz (G.4) daje nesigurnost koja daje interval s manjom razinom povjerenja od intervala dobivena s pomoću povećane nesigurnosti izračunane iz izraza (G.5).

NAPOMENE:

1. U graničnim slučajevima kad $u^2/s^2 \to \infty$ i $\nu_{\text{eff}} \to \infty$, $U'_{95} \to 1{,}732u$, dok $U_{95} \to 1{,}960u$. U tom slučaju, U'_{95} daje interval koji ima razinu povjerenja od samo 91,7 posto, dok U_{95} daje interval koji ima razinu povjerenja od 95 posto. Tomu se slučaju u praksi približava kad prevladavaju sastavnice nesigurnosti dobivene iz procjene gornje i donje granice, kad takvih sastavnica ima velik broj i kad imaju vrijednosti $u_j^2(y) = c_j^2 a_j^2/3$ razmjerno iste veličine.

2. Za normalnu razdiobu faktor pokrivanja $k = \sqrt{3} \approx 1{,}732$ daje interval s razinom povjerenja $p = 91{,}673...$ posto. Ta je vrijednost za p stabilna u tom smislu što je ona, u usporedbi s drugim vrijednostima za p, optimalno neovisna o malim odstupanjima ulaznih veličina od normalne razdiobe.

G.5.3 Ako su slučajno ulazne veličine X_i nesimetrično raspodijeljene, odstupanja s jednim predznakom oko njezine očekivane vrijednosti vjerojatnija su od odstupanja suprotnog predznaka (vidi podtočku 4.3.8). Premda nesimetrija razdiobe ne pravi razliku u određivanju standardne nesigurnosti $u(x_i)$ procjene x_i veličine X_i i, prema tomu, u određivanju sastavljene nesigurnosti $u_c(y)$, ona može utjecati na izračun povećane nesigurnosti U.

Obično je prikladno dati simetrični interval $Y = y \pm U$, osim ako je taj interval takav da postoji važna razlika između odstupanja jednoga predznaka i odstupanja drugoga predznaka. Ako nesimetrija veličine X_i izaziva samo malu nesimetriju u razdiobi vjerojatnosti opisanoj mjernim rezultatom y i njegovom sastavljenom standardnom nesigurnošću $u_c(y)$, smanjenje vjerojatnosti na jednoj strani uzimanjem simetričnog intervala poništava se vjerojatnošću povećanom na drugoj strani tog intervala. Druga je mogućnost dati interval koji je simetričan po vjerojatnosti (i, prema tomu, nesimetričan po povećanoj nesigurnosti U): vjerojatnost da Y leži ispod donje granice $y - U_-$ jednaka je vjerojatnosti da Y leži iznad gornje granice $y + U_+$. Ali da bi se dale takve granice, potrebno je više podataka nego za jednostavne procjene y i $u_c(y)$ [i, prema tomu, više podataka nego jednostavno procjene x_i i $u(x_i)$ svake od ulaznih veličina X_i].

G.5.4 Određivanje vrijednosti povećane nesigurnosti U_p, ovdje dano s pomoću sastavljene nesigurnosti $u_c(y)$, stvarnoga broja stupnjeva slobode ν_{eff} i faktora $t_p(\nu_{\text{eff}})$ iz t-razdiobe, samo je približna vrijednost te ima svoja ograničenja. Razdioba veličine $(y - Y)/u_c(y)$ dana je t-razdiobom samo ako je razdioba veličine Y normalna, a procjena y i njezina sastavljena nesigurnost $u_c(y)$ neovisne te ako je razdioba sastavljene nesigurnosti $u_c^2(y)$ χ^2-razdioba. Uvođenje stvarnog broja stupnjeva slobode ν_{eff} jednadžba (G.2b) vrijedi samo za taj problem i osigurava za $u_c^2(y)$ približno χ^2-razdiobu; drugi dio tog problema, koji proizlazi iz nenormalnosti razdiobe veličine Y, zahtijeva osim varijancije i uzimanje u obzir momenata višeg reda.

G.6 Sažetak i zaključci

G.6.1 Faktor pokrivanja k_p koji daje interval s razinom povjerenja p bliskoj zadanoj razini može se samo naći ako postoji široko znanje o razdiobi vjerojatnosti svake ulazne veličine i ako se te razdiobe sastavljaju kako bi se dobila razdioba izlazne veličine. Procjene x_i ulaznih veličina i njihove standardne nesigurnosti $u(x_i)$ same nisu prikladne za tu svrhu.

G.6.2 Budući da se sveobuhvatni izračuni koji se zahtijevaju za sastavljanje razdioba vjerojatnosti rijetko provjeravaju opsegom i pouzdanošću dostupnih podataka, prihvatljiva je aproksimacija razdiobe izlazne veličine. Zbog središnjega graničnog teorema obično je dostatno pretpostaviti da je razdioba vjerojatnosti veličine $(y - Y)/u_c(y)$ t-razdioba i uzeti $k_p = t_p(\nu_{\text{eff}})$, s t-faktorom koji se temelji na stvarnom broju stupnjeva slobode ν_{eff} nesigurnosti $u_c(y)$ dobivenim iz Welch-Satterthwaiteove formule [jednadžba (G.2b)].

G.6.3 Kako bi se iz jednadžbe (G.2b) dobio stvarni broj stupnjeva slobode ν_{eff}, za svaku sastavnicu standardne nesigurnosti potrebno je znati broj stupnjeva slobode ν_i. Za sastavnicu dobivenu određivanjem A-vrste ν_i se dobiva iz niza neovisnih opetovanih opažanja na kojima se temelji procjena ulazne veličine i nizu neovisnih veličina određenih iz tih opažanja (vidi podtočku G.3.3). Za sastavnicu dobivenu određivanjem B-vrste ν_i se dobiva iz prosuđene pouzdanosti vrijednosti te sastavnice [vidi G.4.2 i jednadžbu (G.3)].

G.6.4 Prema tomu, metoda koja se preporučuje za izračun povećane nesigurnosti $U_p = k_p u_c(y)$ čija je svrha dati interval $Y = y \pm U_p$ koji približno ima razinu povjerenja p može se sažeti ovako:

1) Odrediti y i $u_c(y)$ prema opisu u točkama 4 i 5

2) Izračunati stvarni broj stupnjeva slobode ν_{eff} iz Welch-Satterthwaiteove formule [jednadžba (G.2b) (ovdje ponovljena radi pogodnosti)]:

$$\nu_{\text{eff}} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}} \tag{G.2b}$$

Ako se standardna nesigurnost $u(x_i)$ dobiva određivanjem A-vrste, treba odrediti broj stupnjeva slobode ν_i prema jednostavnom opisu u podtočki G.3.3. Ako se standardna nesigurnost $u(x_i)$ dobiva određivanjem B-vrste, ona se može obrađivati kao da je točno poznata, što je često slučaj u praksi ($\nu_i \to \infty$), inače broj stupnjeva slobode ν_i treba procijeniti iz jednadžbe (G.3)

3) Odrediti t-faktor $t_p(\nu_{\text{eff}})$ za željenu razinu povjerenja p iz tablice G.2. Ako stvarni broj stupnjeva slobode ν_{eff} nije cijeli broj treba interpolirati ili zaokružiti ν_{eff} na prvi niži cijeli broj

4) Uzeti $k_p = t_p(\nu_{\text{eff}})$ i izračunati $U_p = k_p u_c(y)$.

G.6.5 U određenim situacijama, koje se ne bi trebale često pojavljivati u praksi, uvjeti koje zahtijeva središnji granični teorem ne moraju biti dobro ispunjeni i pristup iz podtočke G.6.4 može dovesti do neprihvatljivog rezultata. Npr., ako u $u_c(y)$ prevladava sastavnica nesigurnosti određena iz pravokutne razdiobe za čije se granice pretpostavlja da su točno poznate, mogle bi [ako je $t_p(\nu_{eff}) > \sqrt{3}$] $y + U_p$ i $y - U_p$ gornja i donja granica intervala određenog s U_p, ležati izvan granica razdiobe vjerojatnosti izlazne veličine Y. Takvi se slučajevi moraju obrađivati pojedinačno, ali ih je često moguće i približno analitički obrađivati (uključujući npr. konvoluciju normalne razdiobe s pravokutnom [10]).

G.6.6 Za mnoga praktična mjerenja u raznim područjima primjene prevladavaju ovi uvjeti:

– procjena y mjerene veličine Y dobiva se iz procjena x_i velikoga broja ulaznih veličina X_i koje se mogu opisati razdiobama vjerojatnosti "dobrog ponašanja", kao što su normalna i pravokutna razdioba

– standardne nesigurnosti $u(x_i)$ tih procjena, koje se mogu dobiti određivanjem A-vrste ili određivanjem B-vrste, doprinose razmjerno u istom iznosu sastavljenoj standardnoj nesigurnosti $u_c(y)$ mjernog rezultata y

– linearna aproksimacija koja se podrazumijeva iz zakona prijenosa nesigurnosti (vidi podtočke 5.1.2 i E.3.1) odgovara danim potrebama

– nesigurnost sastavljene nesigurnosti $u_c(y)$ razmjerno je malena jer njezin stvarni broj stupnjeva slobode ν_{eff} ima značajnu vrijednost, recimo veću od 10.

U tim uvjetima za razdiobu vjerojatnosti opisanu mjernim rezultatom i njegovom sastavljenom standardnom nesigurnošću može se, na temelju središnjega graničnoga teorema, pretpostaviti da je normalna; a sastavljena standardna nesigurnost $u_c(y)$ može se zbog značajne vrijednosti stvarnoga broja stupnjeva slobode ν_{eff} uzeti kao razumna pouzdana procjena standardnog odstupanja te normalne razdiobe. Tada se, na temelju razmatranja u ovom dodatku, uključujući izrazito približnu narav postupka određivanja nesigurnosti te nepraktičnost pokušaja razlikovanja intervala koji imaju razine povjerenja koje se razlikuju za jedan ili dva posto, može učiniti ovo:

– prihvatiti za faktor pokrivanja vrijednost $k = 2$ i uzeti da povećana nesigurnost $U = 2u_c(y)$ određuje interval koji ima razinu povjerenja od približno 95 posto;

ili, za kritičnije primjene,

– prihvatiti faktor pokrivanja $k = 3$ i uzeti da povećana nesigurnost $U = 3u_c(y)$ određuje interval koji ima razinu povjerenja od približno 99 posto.

Premda bi taj pristup trebao biti prikladan za mnoga praktična mjerenja, njegova primjenljivost na neko posebno mjerenje ovisit će o tome koliko faktor $k = 2$ mora biti blizu vrijednosti faktora $t_{95}(\nu_{eff})$ ili koliko faktor $k = 3$ mora biti blizu vrijednosti faktora $t_{99}(\nu_{eff})$, tj. koliko razina povjerenja intervala određenog s $U = 2u_c(y)$ ili $U = 3u_c(y)$ mora biti blizu vrijednostima 95 odnosno 99 posto. Premda za vrijednost $\nu_{eff} = 11$ faktor $k = 2$ i $k = 3$ daju procjenu faktora $t_{95}(11)$ i $t_{99}(11)$ umanjenu za samo oko 10 odnosno 4 posto (vidi tablicu G.2), u nekim slučajevima to ne mora biti prihvatljivo. Nadalje, za sve vrijednosti stvarnoga broja stupnjeva slobode ν_{eff} nešto veće od 13 vrijednost faktora pokrivanja $k = 3$ daje interval koji ima razinu povjerenja veću od 99 posto. (Vidi tablicu G.2, koja također pokazuje da su za $\nu_{eff} \to \infty$ razine povjerenja tih intervala dobivenih s faktorima pokrivanja $k = 2$ i $k = 3$ jednake redom 95,45 i 99,73 posto). Na taj se način u praksi veličina ν_{eff} i ono što se zahtijeva od te povećane nesigurnosti određivat će može li se taj pristup primjenjivati.

Tablica G.2: Vrijednost faktora $t_p(\nu)$ iz t-razdiobe za broj stupnjeva slobode ν koji određuje interval od $-t_p(\nu)$ do $+t_p(\nu)$ koji obuhvaća dio p te razdiobe

Broj stupnjeva slobode	**Dio p u postocima**					
ν	**68,27**[a]	**90**	**95**	**95,45**[a]	**99**	**99,73**[a]
1	1,84	6,31	12,71	13,97	63,66	235,80
2	1,32	2,92	4,30	4,53	9,92	19,21
3	1,20	2,35	3,18	3,31	5,84	9,22
4	1,14	2,13	2,78	2,87	4,60	6,62
5	1,11	2,02	2,57	2,65	4,03	5,51
6	1,09	1,94	2,45	2,52	3,71	4,90
7	1,08	1,89	2,36	2,43	3,50	4,53
8	1,07	1,86	2,31	2,37	3,36	4,28
9	1,06	1,83	2,26	2,32	3,25	4,09
10	1,05	1,81	2,23	2,28	3,17	3,96
11	1,05	1,80	2,20	2,25	3,11	3,85
12	1,04	1,78	2,18	2,23	3,05	3,76
13	1,04	1,77	2,16	2,21	3,01	3,69
14	1,04	1,76	2,14	2,20	2,98	3,64
15	1,03	1,75	2,13	2,18	2,95	3,59
16	1,03	1,75	2,12	2,17	2,92	3,54
17	1,03	1,74	2,11	2,16	2,90	3,51
18	1,03	1,73	2,10	2,15	2,88	3,48
19	1,03	1,73	2,09	2,14	2,86	3,45
20	1,03	1,72	2,09	2,13	2,85	3,42
25	1,02	1,71	2,06	2,11	2,79	3,33
30	1,02	1,70	2,04	2,09	2,75	3,27
35	1,01	1,70	2,03	2,07	2,72	3,23
40	1,01	1,68	2,02	2,06	2,70	3,20
45	1,01	1,68	2,01	2,06	2,69	3,18
50	1,01	1,68	2,01	2,05	2,68	3,16
100	1,005	1,660	1,984	2,025	2,626	3,077
∞	1,000	1,645	1,960	2,000	2,576	3,000

[a] Za veličinu z opisanu normalnom razdiobom s očekivanjem μ_z i standardnim odstupanjem σ interval $\mu_z \pm k\sigma$ obuhvaća $p = 68{,}27$ posto, 95,45 posto i 99,73 posto te razdiobe za vrijednosti faktora pokrivanja redom $k = 1, 2$ i 3

Dodatak H

Primjeri

U ovom dodatku dano je šest primjera (H.1 do H.6) koji su izrađeni veoma iscrpno kako bi zorno prikazali temeljna načela izložena u ovim uputama za određivanje i izražavanje mjerne nesigurnosti. Zajedno s primjerima uključenim u glavni dio teksta i u neke druge dodatke oni bi trebali omogućiti korisnicima ovih *uputa* da ta načela unesu u svoj vlastiti rad.

Budući da ti primjeri služe za ilustraciju, nužno su pojednostavljeni. Osim toga, budući da su ti primjeri i u njima upotrijebljeni brojčani podatci odabrani uglavnom radi pokazivanja načela ovih *uputa*, ne bi se trebalo nužno tumačiti da ti primjeri i podatci u njima opisuju stvarna mjerenja. Premda se podatci upotrebljavaju kako su dani, da bi se izbjegle pogrješke zaokruživanja, u međuizračunima se zadržava više znamenaka nego što se obično prikazuje. Na taj se način navedeni rezultat izračuna, uključujući više veličina, može ponešto razlikovati od rezultata koji potječe iz brojčanih vrijednosti danih u tekstu za te veličine.

U prethodnim dijelovima ovih *uputa* istaknuto je da razvrstavanje metoda koje se primjenjuju za određivanje sastavnica nesigurnosti na sastavnice A- ili B-vrste služi samo za prikladnost opisa; ono se ne zahtijeva za određivanje sastavljene standardne nesigurnosti ili povećane standardne nesigurnosti mjernog rezultata jer se sve sastavnice nesigurnosti, bez obzira na to kako su određene, obrađuju na isti način (vidi podtočke 3.3.4, 5.1.2 i E.3.7). Na taj način u tim primjerima metoda upotrijebljena za određivanje posebne sastavnice nesigurnosti ne identificira sastavnicu posebno prema njezinoj vrsti. Međutim, iz rasprave će biti jasno je li sastavnica dobivena određivanjem A-vrste ili određivanjem B-vrste.

H.1 Umjeravanje granične mjerke

Ovaj primjer pokazuje da čak i očigledno jednostavno mjerenje može uključivati istančane aspekte određivanja nesigurnosti.

H.1.1 Mjerni zadatak

Duljina granične mjerke nazivne duljine 50 mm određuje se njezinom usporedbom s poznatim etalonom iste nazivne duljine. Izravni rezultat usporedbe dviju graničnih mjerka razlika je njihovih duljina:

$$d = l(1 + \alpha\theta) - l_S(1 + \alpha_S\theta_S) \tag{H.1}$$

gdje znakovi u jednadžbi (H.1) imaju ova značenja:

- l je mjerena veličina, tj. duljina granične mjerke koja se umjerava kod 20 °C
- l_S je duljina etalona kod 20 °C kako je dana u njegovoj potvrdi o umjeravanju
- α i α_S su koeficijenti toplinskog širenja, redom granične mjerke koja se umjerava i etalona
- θ i θ_S su *odstupanja* temperature od referentne temperature od 20 °C, redom granične mjerke i etalona.

H.1.2 Matematički model

Mjerena je veličina na temelju jednadžbe (H.1) dana izrazom:

$$l = \frac{l_S(1 + \alpha_S\theta_S) + d}{(1 + \alpha\theta)} = l_S + d + l_S(\alpha_S\theta_S - \alpha\theta) + \ldots \tag{H.2}$$

Ako se razlika temperature između granične mjerke koja se umjerava i etalona napiše kao $\delta\theta = \theta - \theta_S$, a razlika njihovih koeficijenata toplinskog širenja kod $\delta\alpha = \alpha - \alpha_S$, jednadžba (H.2) postaje:

$$l = f(l_S, d, \alpha_S, \theta, \delta\alpha, \delta\theta) = l_S + d - l_S\,(\delta\alpha \cdot \theta + \alpha_S \cdot \delta\theta) \tag{H.3}$$

Procjenjuje se da su razlike $\delta\theta$ i $\delta\alpha$, ali ne i njihove nesigurnosti, jednake ništici, a uzima se, da $\delta\alpha$, α_S, $\delta\theta$ i θ nisu korelirane. (Kad bi se mjerena veličina izražavala s pomoću varijabla θ, θ_S, α i α_S, bilo bi potrebno uključiti korelaciju između θ i θ_S i α i α_S).

Na taj način, iz jednadžbe (H.3) slijedi da se procjena vrijednosti mjerene veličine l može dobiti iz jednostavnog izraza $l_S + \overline{d}$, gdje je l_S duljina etalona kod 20 °C kako je dana u njegovoj potvrdi o umjeravanju, a d se procjenjuje s pomoću $\overline{d}$, aritmetičke sredine vrijednosti $n = 5$ neovisnih opetovanih opažanja. Sastavljena standardna nesigurnost $u_c(l)$ duljine l dobiva se, kao što se govori u nastavku, primjenom jednadžbe (10) iz podtočki 5.1.2 na jednadžbu (H.3).

NAPOMENA: U ovom i drugim primjerima zbog jednostavnosti zapisa isti se znak upotrebljava za veličinu i njezinu procjenu.

H.1.3 Varijancije doprinosa

Pregled standardnih sastavnica nesigurnosti iz ovog primjera o kojem se govori u ovoj i idućim točkama sažeto je dan u tablici H.1.

Budući da se uzima da je $\delta\alpha = 0$ i $\delta\theta = 0$, primjena jednadžbe (10) iz podtočke 5.1.2 na jednadžbu (H.3) daje:

$$u_c^2(l) = c_S^2 u^2(l_S) + c_d^2 u^2(d) + c_{\alpha_S}^2 u^2(\alpha_S) + c_\theta^2 u^2(\theta) + c_{\delta\alpha}^2 u^2(\delta\alpha) + c_{\delta\theta}^2 u^2(\delta\theta) \tag{H.4}$$

s

$$c_S = \partial f/\partial l_S = 1 - (\delta\alpha \cdot \theta + \alpha_S \cdot \delta\theta) = 1$$

$$c_d = \partial f/\partial d = 1$$

$$c_{\alpha_S} = \partial f/\partial \alpha_S = -l_S\delta\theta = 0$$

$$c_\theta = \partial f/\partial \theta = -l_S\delta\alpha = 0$$

$$c_{\delta\alpha} = \partial f/\partial \delta\alpha = -l_S\theta$$

$$c_{\delta\theta} = \partial f/\partial \delta\theta = -l_S\alpha_S$$

i prema tomu:

$$u_c^2(l) = u^2(l_s) + u^2(d) + l_S^2\theta^2 u^2(\delta\alpha) + l_S^2\alpha_S^2 u^2(\delta\theta) \tag{H.5}$$

H.1.3.1 Nesigurnost umjeravanja etalona, $u(l_S)$

U potvrdi o umjeravanju daje se za povećanu nesigurnost etalona vrijednost $U = 0{,}075$ µm i navodi se da je ona dobivena primjenom faktora pokrivanja $k = 3$. Standardna nesigurnost tada je jednaka:

$$u(l_S) = (0{,}075\ \mu\text{m})/3 = 25\ \text{nm}$$

H.1.3.2 Nesigurnost izmjerene razlike duljina, $u(d)$

Skupno eksperimentalno standardno odstupanje koje opisuje usporedbu veličina l i l_S određeno je iz promjenljivosti 25 neovisnih opetovanih opažanja razlike duljine dviju etalonskih graničnih mjerka te je utvrđeno da iznosi 13 nm. U usporedbi iz ovoga primjera uzeto je pet opetovanih opažanja. Standardna nesigurnost pridružena aritmetičkoj sredini tih očitanja tada je jednaka (vidi podtočku 4.2.4):

$$u(\overline{d}) = s(\overline{d}) = (13\ \text{nm})/\sqrt{5} = 5{,}8\ \text{nm}$$

Prema potvrdi o umjeravanju komparatora upotrijebljenog za usporedbu veličina l i l_S njegova nesigurnost "nastala zbog slučajnih pogrješaka" jednaka je ± 0,01 µm na razini povjerenja od 95 posto, a temelji se na 6 na istovjetan način opetovanih mjerenja. Na taj je način standardna nesigurnost primjenom t-faktora $t_{95}(5) = 2{,}57$ za $\nu = 6 - 1 = 5$ stupnjeva slobode (vidi dodatak G, tablica G.2) jednaka:

$$u(d_1) = (0{,}01\ \mu\text{m})/2{,}57 = 3{,}9\ \text{nm}$$

Nesigurnost komparatora "nastala zbog sustavnih pogrješaka" dana je u potvrdi o umjeravanju kao 0,02 μm na "razini tri sigma". Za standardnu nesigurnost nastalu zbog tog uzroka može se prema tomu uzeti da je jednaka:

$$u(d_2) = (0{,}02\ \mu\text{m})/3 = 6{,}7\ \text{nm}$$

Za ukupni doprinos nesigurnosti izmjerene razlike duljina dobiva se iz zbroja procijenjenih varijancija:

$$u^2(d) = u^2(\overline{d}) + u^2(d_1) + u^2(d_2) = 93\ \text{nm}^2$$

ili

$$u(d) = 9{,}7\ \text{nm}$$

H.1.3.3 Nesigurnost koeficijenta toplinskog širenja, $u(\alpha_S)$

Koeficijent toplinskog širenja etalonske granične mjerke dan je kao $\alpha_S = 11{,}5 \times 10^{-6}\ °\text{C}^{-1}$ s nesigurnošću opisanom pravokutnom razdiobom s granicama od $\pm 2 \times 10^{-6}\ °\text{C}^{-1}$. Nesigurnost etalona tada je jednaka [vidi jednadžbu (7) u podtočki 4.3.7]:

$$u(\alpha_S) = (2 \times 10^{-6}\ °\text{C}^{-1})/\sqrt{3} = 1{,}2 \times 10^{-6}\ °\text{C}^{-1}$$

Budući da je $c_{\alpha_S} = \partial f/\partial \alpha_S = -l_S \delta\theta = 0$, kako je pokazano u podtočki H.1.3, ta nesigurnost ništa ne doprinosi nesigurnosti veličine l u članovima prvog reda njezina razvoja u red potencija. Ona, međutim, daje doprinos s članovima drugog reda njezina razvoja u red potencija o čemu se raspravlja u podtočki H.1.7

Tablica H.1: Sažeti prikaz sastavnica standardne nesigurnosti

Sastavnica standardne nesigurnosti $u(x_i)$	**Izvor nesigurnosti**	**Vrijednost standardne nesigurnosti** $u(x_i)$	$c_i \equiv \partial f/\partial x_i$	$u_i(l) \equiv \lvert c_i \rvert u(x_i)$ (nm)	**Broj stupnjeva slobode**
$u(l_S)$	Umjeravanje etalonske granične mjerke	25 nm	1	25	18
$u(d)$	Izmjerena razlika između graničnih mjerka	9,7 nm	1	9,7	25,6
$u(\overline{d})$	opetovana opažanja	5,8 nm			24
$u(d_1)$	slučajna djelovanja na komparator	3,9 nm			5
$u(d_2)$	sustavna djelovanja na komparator	6,7 nm			8
$u(\alpha_S)$	Koeficijent toplinskog širenja etalonske granične mjerke	$1{,}2 \times 10^{-6}\ °\text{C}^{-1}$	0	0	
$u(\theta)$	Temperatura ispitne površine	0,41 °C	0	0	
$u(\overline{\theta})$	srednja temperatura ispitne podloge	0,2 °C			
$u(\Delta)$	ciklička promjena sobne temperature	0,35 °C			
$u(\delta\alpha)$	Razlika koeficijenata širenja	$0{,}58 \times 10^{-6}\ °\text{C}^{-1}$	$-l_S\theta$	2,9	50
$u(\delta\theta)$	Razlika temperatura mjerki	0,029 °C	$-l_S\alpha_S$	16,6	2
					$u_c^2(l) = \sum u_i^2(l) = 1\ 002\ \text{nm}^2$ $u_c(l) = 32\ \text{nm}$ $\nu_{\text{eff}}(l) = 16$

H.1.3.4 Nesigurnost odstupanja temperature granične mjerke, $u(\theta)$

Za temperaturu ispitne podloge navodi se da je jednaka (19,9 ± 0,5) °C; temperatura u vrijeme opažanja nije se bilježila. Za navedeno najveće odstupanje $\Delta = 0{,}5$ °C, kaže se da prikazuje amplitudu približno cikličkih promjena temperature u termostatski reguliranom sustavu, a ne nesigurnost srednje vrijednosti temperature. Za vrijednost srednjeg odstupanja temperature jednaku:

$$\overline{\theta} = 19{,}9\ °\mathrm{C} - 20\ °\mathrm{C} = -\,0{,}1\ °\mathrm{C}$$

navodi se da sama ima standardnu nesigurnost koja potječe od nesigurnosti srednje temperature ispitne podloge, jednaku:

$$u(\overline{\theta}) = 0{,}2\ °\mathrm{C}$$

dok vremenske cikličke promjene proizvode razdiobu U-oblika (arcussinus) temperatura koja daje standardnu nesigurnost:

$$u(\Delta) = (0{,}5\ °\mathrm{C})/\sqrt{2} = 0{,}35\ °\mathrm{C}$$

Za odstupanje temperature θ može se uzeti da je jednako srednjoj vrijednosti $\overline{\theta}$, a standardna nesigurnost odstupanja temperature θ dobiva se iz izraza:

$$u^2(\theta) = u^2(\overline{\theta}) + u^2(\Delta) = 0{,}165\ °\mathrm{C}^2$$

što daje:

$$u(\theta) = 0{,}41\ °\mathrm{C}$$

Budući da je $c_\theta = \partial f/\partial\theta = -l_\mathrm{S}\delta\alpha = 0$, kako je pokazano u podtočki H.1.3, ta nesigurnost također ništa ne doprinosi nesigurnosti veličine l u članovima prvog reda razvoja u red potencija, ali daje doprinos u članovima drugog reda razvoja u red potencija o čemu se raspravlja u podtočki H.1.7.

H.1.3.5 Nesigurnost razlike koeficijenata toplinskog širenja, $u(\delta\alpha)$

Procijenjene granice promjene koeficijenta toplinskog širenja $\delta\alpha$ jednake su $\pm 1 \times 10^{-6}\ °\mathrm{C}^{-1}$; svaka vrijednost koeficijenta toplinskog širenja $\delta\alpha$ unutar tih granica ima istu vjerojatnost. Standardna nesigurnost tada je jednaka:

$$u(\delta\alpha) = (1 \times 10^{-6}\ °\mathrm{C}^{-1})/\sqrt{3} = 0{,}58 \times 10^{-6}\ °\mathrm{C}^{-1}$$

H.1.3.6 Nesigurnost razlike temperatura mjerke, $u(\delta\theta)$

Pretpostavlja se da su etalonska i ispitna mjerka na istoj temperaturi, ali bi razlika temperature mogla s istom vjerojatnošću ležati bilo gdje u procijenjenom intervalu od –0,05 °C do + 0,05 °C. Standardna nesigurnost te razlike jednaka je:

$$u(\delta\theta) = (0{,}05\ °\mathrm{C})/\sqrt{3} = 0{,}029\ °\mathrm{C}$$

H.1.4 Sastavljena standardna nesigurnost

Sastavljena standardna nesigurnost $u_\mathrm{c}(l)$ izračunava se iz jednadžbe (H.5). Pojedinačni se članovi uvršćuju u taj izraz te se dobiva:

$$u_\mathrm{c}^2(l) = (25\ \mathrm{nm})^2 + (9{,}7\ \mathrm{nm})^2 + (0{,}05\ \mathrm{m})^2\,(-0{,}1\ °\mathrm{C})^2(0{,}58 \times 10^{-6}\ °\mathrm{C}^{-1})^2 + (0{,}05\ \mathrm{m})^2(11{,}5 \times 10^{-6}\ °\mathrm{C}^{-1})^2(0{,}029\ °\mathrm{C})^2 \tag{H.6a}$$

$$= (25\ \mathrm{nm})^2 + (9{,}7\ \mathrm{nm})^2 + (2{,}9\ \mathrm{nm})^2 + (16{,}6\ \mathrm{nm})^2 = 1002\ \mathrm{nm}^2 \tag{H.6b}$$

ili

$$u_\mathrm{c}(l) = 32\ \mathrm{nm} \tag{H.6c}$$

Najistaknutija sastavnica nesigurnosti očito je sastavnica nesigurnosti koja potječe od etalona $u(l_\mathrm{S}) = 25$ nm.

H.1.5 Konačni rezultat

Potvrda o umjeravanju za etalonsku graničnu mjerku daje $l_S = 50{,}000\,623$ mm kao njezinu duljinu kod 20 °C. Aritmetička sredina $\overline{d}$ pet opetovanih opažanja razlike duljina između nepoznate granične mjerke i etalonske mjerke jednaka je 215 nm. Na taj je način, budući da je $l = l_S + \overline{d}$ (vidi podtočku H.1.2), duljina l nepoznate granične mjerke kod 20 °C jednaka 50,000 838 mm. Prema podtočki 7.2.2 konačni rezultat tog mjerenja može se iskazati kao:

> $l = 50{,}000\,838$ mm sa sastavljenom standardnom nesigurnošću $u_c = 32$ nm. Odgovarajuća relativna sastavljena standardna nesigurnost jednaka je $l_S / l = 6{,}4 \times 10^{-7}$.

H.1.6 Povećana nesigurnost

Pretpostavimo da je potrebno dobiti povećanu nesigurnost $U_{99} = k_{99}u_c(l)$, što daje interval koji ima razinu povjerenja od približno 99 posto. Primjenjuje se postupak koji je sažeto prikazan u podtočki G.6.4, a zahtijevani brojevi stupnjeva slobode prikazani su u tablici H.1. Ti su brojevi stupnjeva slobode dobiveni ovako:

1) *Nesigurnost umjeravanja etalona*, $u_c(l_S)$ [H.1.3.1]. U potvrdi o umjeravanju navodi se da je stvarni broj stupnjeva slobode sastavljene standardne nesigurnosti iz koje je dobivena povećana standardna nesigurnost jednak $\nu_{\text{eff}}(l_S) = 18$

2) *Nesigurnost izmjerene razlike duljina*, $u(d)$ [H.1.3.2]. Premda je srednja vrijednost $\overline{d}$ dobivena iz pet opetovanih opažanja, budući da je standardna nesigurnost $u(\overline{d})$ dobivena iz zbirnog eksperimentalnog standardnog odstupanja koje se temelji na 25 opažanja, broj stupnjeva slobode standardne nesigurnosti $u(\overline{d})$ jednak je $\nu(\overline{d}) = 25 - 1 = 24$ (vidi podtočku H.3.6, napomenu). Broj stupnjeva slobode nesigurnosti $u(d_1)$, nesigurnost zbog slučajnih djelovanja na komparator, jednak je $\nu(d_1) = 6 - 1 = 5$ jer je razlika d_1 dobivena iz šest opetovanih mjeranja. Nesigurnost od $\pm 0{,}02$ µm koja potječe od sustavnih djelovanja na komparator može se smatrati pouzdanom do 25 posto te je na taj način broj stupnjeva slobode iz jednadžbe (G.3) u podtočki G.4.2 jednak $\nu(d_2) = 8$ (vidi primjer u podtočki G.4.2). Stvarni broj stupnjeva slobode $\nu_{\text{eff}}(d)$ mjerne nesigurnosti $u(d)$ dobije se tada iz jednadžbe (G.2b) u podtočki G.4.1:

$$\nu_{\text{eff}}(d) = \frac{\left[u^2(\overline{d}) + u^2(d_1) + u^2(d_2)\right]^2}{\dfrac{u^4(\overline{d})}{\nu(\overline{d})} + \dfrac{u^4(d_1)}{\nu(d_1)} + \dfrac{u^4(d_2)}{\nu(d_2)}} = \frac{(9{,}7\ \text{nm})^4}{\dfrac{(5{,}8\ \text{nm})^4}{24} + \dfrac{(3{,}9\ \text{nm})^4}{5} + \dfrac{(6{,}7\ \text{nm})^4}{8}} = 25{,}6$$

3) *Nesigurnost razlike koeficijenta širenja*, $u(\delta\alpha)$ [H.1.3.5]. Procijenjene granice promjenljivosti jednake $\pm\, 1 \times 10^{-6}\,°\text{C}^{-1}$ koeficijenta širenja $\delta\alpha$ smatraju se pouzdanim 10 posto. Iz tog se na temelju jednadžbe (G.3) iz podtočke G.4.2 dobije da je broj stupnjeva slobode jednak $\nu(\delta\alpha) = 50$

4) *Nesigurnost razlike temperatura mjerke*, $u(\delta\theta)$ [H.1.3.6]. Procijenjeni interval od –0,05 °C do + 0,05 °C za temperaturnu razliku $\delta\theta$ smatra se pouzdanim samo 50 posto, što iz jednadžbe (G.3) u podtočki G.4.2 dobije daje za broj stupnjeva slobode $\nu(\delta\theta) = 2$.

Izračun stvarnoga broja stupnjeva slobode $\nu_{\text{eff}}(l)$ iz jednadžbe (G.2b) u podtočki G.4.1 provodi se na točno isti način kao izračun stvarnoga broja stupnjeva slobode $\nu_{\text{eff}}(d)$ pod 2). Na taj način, iz jednadžbe (H.6b) i (H.6c) i vrijednosti za broj stupnjeva slobode ν danih u točkama od 1) do 4), izlazi:

$$\nu_{\text{eff}}(l) = \frac{(32\ \text{nm})^4}{\dfrac{(25\ \text{nm})^4}{18} + \dfrac{(9{,}7\ \text{nm})^4}{25{,}6} + \dfrac{(2{,}9\ \text{nm})^4}{50} + \dfrac{(16{,}6\ \text{nm})^4}{2}} = 16{,}7$$

Da bi se dobila zahtijevana povećana nesigurnost, ta se vrijednost prvo zaokruži na prvi manji cijeli broj $\nu_{\text{eff}}(l) = 16$. Tada iz tablice G.2 u dodatku G slijedi da je $t_{99}(16) = 2{,}92$ i, prema tomu, $U_{99} = t_{99}(16)u_c(l) = 2{,}92 \times (32\ \text{nm}) = 93$ nm. Prema podtočki 7.2.4 konačni rezultat tog mjerenja može se iskazati kao:

> $l = (50{,}000\,838 \pm 0{,}000\,093)$ mm, gdje je broj iza znaka ± brojčana vrijednost povećane nesigurnosti $U = ku_c$ s vrijednošću U određenom iz sastavljene standardne nesigurnosti $u_c = 32$ nm i faktora

pokrivanja $k = 2{,}92$ koji se temelji na t-razdiobi za $\nu = 16$ stupnjeva slobode i određuje interval procijenjen s razinom povjerenja od 99 posto. Odgovarajuća relativna povećana nesigurnost jednaka je $U/l = 1{,}9 \times 10^{-6}$.

H.1.7 Članovi drugog reda

Napomena iz podtočke 5.1.2 ističe da se jednadžba (10), koja se upotrebljava u tom primjeru da bi se dobila sastavljena standardna nesigurnost $u_c(l)$, mora dopuniti kad su nelinearnosti funkcije $Y = f(X_1, X_2, ..., X_N)$ toliko značajne da se članovi višeg reda u Taylorovu razvoju ne mogu zanemariti. Takav je slučaj u ovom primjeru, pa je, prema tomu, određivanje sastavljene standardne nesigurnosti $u_c(l)$, kako je prethodno prikazano, nepotpuno. Primjena izraza danog u napomeni iz podtočke 5.1.2 na jednadžbu (H.3) daje u stvari dva različita nezanemariva člana drugog reda koji se trebaju dodati jednadžbi (H.5). Ti članovi, koji potječu iz kvadratičnih članova u izrazu iz te napomene jesu:

$$l_S^2 u^2(\delta\alpha) u^2(\theta) + l_S^2 u^2(\alpha_S) u^2(\delta\theta)$$

ali samo prvi od njih znatnije doprinosi sastavljenoj nesigurnosti $u_c(l)$:

$$l_S u(\delta\alpha) u(\theta) = (0{,}05\ \text{m})(0{,}58 \times 10^{-6}\ {}^\circ\text{C}^{-1})(0{,}41\ {}^\circ\text{C}) = 11{,}7\ \text{nm}$$

$$l_S u(\alpha_S) u(\delta\theta) = (0{,}05\ \text{m})(1{,}2 \times 10^{-6}\ {}^\circ\text{C}^{-1})(0{,}029\ {}^\circ\text{C}) = 1{,}7\ \text{nm}$$

Članovi drugog reda povećavaju sastavljenu nesigurnost $u_c(l)$ od 32 nm na 34 nm.

H.2 Istodobno mjerenje otpora i reaktancije

Ovaj primjer pokazuje obradbu množine mjerenih veličina ili izlaznih veličina koje se istodobno određuju istim mjerenjem i korelacije njihovih procjena. U njemu se razmatraju samo slučajne promjene opažanja; u stvarnosti bi nesigurnosti mjernih rezultata također doprinosile i nesigurnosti ispravaka provedenih zbog sustavnih djelovanja. Podatci se analiziraju na dva različita načina od kojih svaki daje u biti iste brojčane vrijednosti.

H.2.1 Mjerni zadatak

Otpor R i reaktancija X elementa strujnog kruga određuju se mjerenjem amplitude V izmjeničnoga sinusoidalnog napona na priključcima toga strujnog kruga, amplitude I izmjenične struje koja protječe kroz taj strujni krug i kuta ϕ faznog pomaka izmjeničnog napona u odnosu na izmjeničnu struju. Prema tomu, tri ulazne veličine su V, I i ϕ, a tri su izlazne veličine (mjerene veličine) tri sastavnice impedancije R, X i Z. Budući da je $Z^2 = R^2 + X^2$, postoje samo dvije neovisne izlazne veličine.

H.2.2 Matematički model i podatci

Mjerene veličine povezane su s ulaznim veličinama Ohmovim zakonom:

$$R = \frac{V}{I}\cos\phi, \quad X = \frac{V}{I}\sin\phi, \quad Z = \frac{V}{I} \tag{H.7}$$

Uzmimo da je u sličnim uvjetima (vidi B.2.15) dobiveno pet neovisnih skupova istodobnih opažanja triju ulaznih veličina V, I, i ϕ, čiji su rezultat podatci dani u tablici H.2. U toj tablici također su dane aritmetičke sredine tih opažanja i eksperimentalna standardna odstupanja tih sredina izračunana iz jednačaba (3) i (5) iz podtočke 4.2. Te srednje vrijednosti uzimaju se najboljim procjenama očekivanih vrijednosti ulaznih veličina, a njihova eksperimentalna standardna odstupanja standardne su nesigurnosti tih sredina.

Budući da se srednje vrijednosti $\overline{V}$, $\overline{I}$, i $\overline{\phi}$ dobivaju iz istodobnih opažanja, one su korelirane i te se korelacije moraju uzeti u obzir u određivanju standardnih nesigurnosti mjerenih veličina R, X i Z. Zahtjevani koeficijenti korelacije lako se dobivaju iz jednadžbe (14) iz podtočke 5.2.2 na temelju vrijednosti kovarijancija $s(\overline{V}, \overline{I})$, $s(\overline{V}, \overline{\phi})$ i $s(\overline{I}, \overline{\phi})$ izračunanih iz jednadžbe (17) iz podtočke 5.2.3. Ti su rezultati uključeni u tablicu H.2, pri čemu bi trebalo podsjetiti da je $r(x_i, x_j) = r(x_j, x_i)$ i $r(x_i, x_i) = 1$.

Tablica H.2: Vrijednosti ulaznih veličina V, I i ϕ dobivene iz pet skupova istodobnih opažanja.

Broj skupa	Ulazne veličine		
k	V (V)	I (mA)	ϕ (rad)
1	5,007	19,663	1,0456
2	4,994	19,639	1,0438
3	5,005	19,640	1,0468
4	4,990	19,685	1,0428
5	4,999	19,678	1,0433
Aritmetička sredina	$\overline{V} = 4{,}999\ 0$	$\overline{I} = 19{,}661\ 0$	$\overline{\phi} = 1{,}044\ 46$
Eksperimentalno standardno odstupanje srednje vrijednosti	$s(\overline{V}) = 0{,}003\ 2$	$s(\overline{I}) = 0{,}009\ 5$	$s(\overline{\phi}) = 0{,}000\ 75$
Koeficijenti korelacije			
$r(\overline{V}, \overline{I}) = -0{,}36$ $r(\overline{V}, \overline{\phi}) = 0{,}86$ $r(\overline{I}, \overline{\phi}) = -0{,}65$			

H.2.3 Rezultati: 1. pristup

1. pristup prikazan je u sažetu obliku u tablici H.3

Vrijednosti triju mjerenih veličina R, X i Z dobivaju se iz odnosa danih jednadžbom (H.7) uvrštenjem umjesto $\overline{V}$, $\overline{I}$ i $\overline{\phi}$ srednjih vrijednosti V, I i ϕ iz tablice H.2. Standardne nesigurnosti veličina R, X i Z dobivaju se iz jednadžbe (16) u podtočki 5.2.2 jer su, kako je prethodno istaknuto, ulazne veličine $\overline{V}$, $\overline{I}$ i $\overline{\phi}$ korelirane. Kao primjer razmotrimo $Z = \overline{V}/\overline{I}$. Ako se x_1 zamijeni procjenom $\overline{V}$, x_2 procjenom $\overline{I}$, a funkcija f omjerom $Z = \overline{V}/\overline{I}$, jednadžba (16) iz podtočke 5.2.2 daje za sastavljenu standardnu nesigurnost veličine Z:

$$u_c^2(Z) = \left(\frac{1}{\overline{I}}\right)^2 u^2(\overline{V}) + \left(\frac{\overline{V}}{\overline{I}^2}\right)^2 u^2(\overline{I}) + 2\left(\frac{1}{\overline{I}}\right)\left(-\frac{\overline{V}}{\overline{I}^2}\right) u(\overline{V})\, u(\overline{I})\, r(\overline{V}, \overline{I}) \tag{H.8a}$$

$$= Z^2\left[\frac{u(\overline{V})}{\overline{V}}\right]^2 + Z^2\left[\frac{u(\overline{I})}{\overline{I}}\right]^2 - 2Z^2\left[\frac{u(\overline{V})}{\overline{V}}\right]\left[\frac{u(\overline{I})}{\overline{I}}\right] r(\overline{V}, \overline{I}) \tag{H.8b}$$

ili

$$u_{c,r}^2(\overline{Z}) = u_r^2(\overline{V}) + u_r^2(\overline{I}) - 2u_r(\overline{V})\, u_r(\overline{I})\, r(\overline{V}, \overline{I}) \tag{H.8c}$$

gdje je $u(\overline{V}) = s(\overline{V})$, $u(\overline{I}) = s(\overline{I})$, a indeks "r" u posljednjem izrazu pokazuje da je u relativna nesigurnost. Uvrštenje odgovarajućih vrijednosti iz tablice H.2 u jednadžbu (H.8a) tada daje za sastavljenu nesigurnost $u_c(Z) = 0{,}236\ \Omega$.

Budući da te tri mjerene ili izlazne veličine ovise o istim ulaznim veličinama one su također korelirane. Elementi kovarijancijske matrice koja opisuje tu korelaciju mogu se općenito napisati kao:

$$u(y_l, y_m) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial y_l}{\partial x_i}\frac{\partial y_m}{\partial x_j} u(x_i)u(x_j)r(x_i, x_j) \tag{H.9}$$

gdje je $y_l = f_l(x_1, x_2, ..., x_N)$, a $y_m = f_m(x_1, x_2, ..., x_N)$. Jednadžba (H.9) poopćenje je jednadžbe (F.2) iz podtočke F.1.2.3 kad su varijable q_l u tom izrazu korelirane. Procijenjeni koeficijenti korelacije ulaznih veličina dani su, kako je pokazano u jednadžbi (14) u podtočki 5.2.2, izrazom $r(y_l, y_m) = u(y_l, y_m)/u(y_l)u(y_m)$. Trebalo bi znati da su dijagonalni elementi kovarijancijske matrice $u(y_l, y_l) \equiv u^2(y_l)$ procijenjene varijancije izlaznih veličina y_l (vidi podtočku 5.2.2, napomenu 2.) te da je za $m = l$ jednadžba (H.9) istovjetna jednadžbi (16) iz podtočke 5.2.2.

Da bi se na ovaj primjer primijenila jednadžba (H.9), učinjene su ove zamjene:

$y_1 = R \qquad x_1 = \overline{V} \qquad u(x_i) = s(\overline{x_i})$

$y_2 = X \qquad x_2 = \overline{I} \qquad N = 3$

$y_3 = Z \qquad x_3 = \overline{\phi}$

Rezultati izračuna veličina R, X i Z i njihovih procijenjenih varijancija i koeficijenata korelacije dani su u tablici H.3.

Tablica H.3: Izračunane vrijednosti izlaznih veličina R, X i Z: 1. pristup

Kazalo mjerne veličine l	**Odnos između procjene y_l i procjene x_i**	**Vrijednost procjene y_l mjernog rezultata**	**Sastavljena standardna nesigurnost $u_c(y_l)$ mjernog rezultata**
1	$y_1 = R = (\overline{V}/\overline{I})\cos\overline{\phi}$	$y_1 = R = 127{,}732\ \Omega$	$u_c(R) = 0{,}071\ \Omega$ $u_c(R)/R = 0{,}06 \times 10^{-2}$
2	$y_2 = X = (\overline{V}/\overline{I})\sin\overline{\phi}$	$y_2 = X = 219{,}847\ \Omega$	$u_c(X) = 0{,}295\ \Omega$ $u_c(X)/X = 0{,}13 \times 10^{-2}$
3	$y_3 = Z = \overline{V}/\overline{I}$	$y_3 = Z = 254{,}260\ \Omega$	$u_c(Z) = 0{,}236\ \Omega$ $u_c(Z)/Z = 0{,}09 \times 10^{-2}$
Koeficijenti korelacije $r(y_l, y_m)$			
$r(y_1, y_2) = r(R, X) = -0{,}588$ $r(y_1, y_3) = r(R, Z) = -0{,}485$ $r(y_2, y_3) = r(X, Z) = 0{,}993$			

H.2.4 Rezultati: 2. pristup

2. pristup sažeto je prikazan u tablici H.4.

Budući da su ti podatci dobiveni kao pet skupova opažanja triju ulaznih veličina V, I i ϕ, moguće je iz *svakog skupa* ulaznih podataka izračunati vrijednost za R, X i Z i onda, da bi se dobile najbolje procjene za R, X i Z, uzeti aritmetičku sredinu tih pet pojedinačnih vrijednosti. Eksperimentalno standardno odstupanje svake srednje vrijednosti (što je njezina sastavljena standardna nesigurnost) izračunava se tada na uobičajen način [jednadžba (5) iz podtočke 4.2.3] iz tih pet pojedinačnih vrijednosti, a procijenjene kovarijancije tih triju srednjih vrijednosti izračunavaju se primjenom jednadžbe (17) iz podtočke 5.2.3 izravno na tih pet pojedinačnih vrijednosti iz kojih se dobiva srednja vrijednost. Izlazne vrijednosti, standardne nesigurnosti i procijenjene kovarijancije dobivene ovim dvama pristupima ne razlikuju se osim u djelovanjima drugog reda koja su posljedica zamjene članova $\overline{V}/\overline{I}$ i $\cos\overline{\phi}$ s $\overline{V/I}$ i $\overline{\cos\phi}$.

Kako bi se pokazao taj pristup u tablici H.4 dane su vrijednosti za R, X i Z izračunane iz svakog od pet skupova opažanja. Aritmetičke sredine, standardne nesigurnosti i procijenjeni koeficijenti korelacije tada se izravno izračunavaju iz tih pojedinačnih vrijednosti. Brojčani rezultati dobiveni na ovaj način zanemarivo se razlikuju od rezultata danih u tablici H.3.

Tablica H.4: Izračunane vrijednosti izlaznih veličina R, X i Z: 2. pristup

Broj skupa k	Pojedinačne vrijednosti mjerenih veličina		
	$R = (V/I)\cos\phi$ (Ω)	$X = (V/I)\sin\phi$ (Ω)	$Z = V/I$ (Ω)
1	127,67	220,32	254,64
2	127,89	219,79	254,29
3	127,51	220,64	254,84
4	127,71	218,97	253,49
5	127,88	219,51	254,04
Aritmetička sredina	$y_1 = \overline{R} = 127{,}732$	$y_2 = \overline{X} = 219{,}847$	$y_3 = \overline{Z} = 254{,}260$
Eksperimentalno standardno odstupanje srednje vrijednosti	$s(\overline{R}) = 0{,}071$	$s(\overline{X}) = 0{,}295$	$s(\overline{Z}) = 0{,}236$
Koeficijenti korelacije $r(y_l, y_m)$			
$r(y_1, y_2) = r(\overline{R}, \overline{X}) = -0{,}558$ $r(y_1, y_3) = r(\overline{R}, \overline{Z}) = -0{,}485$ $r(y_2, y_3) = r(\overline{X}, \overline{Z}) = 0{,}993$			

U skladu s napomenom iz podtočke 4.1.4, 2. pristup primjer je dobivanja procjene y iz izraza $\overline{Y} = (\sum_{k=1}^{n} Y_k)/n$, dok je 1. pristup primjer dobivanja procjene y iz izraza $y = f(\overline{X}_1, \overline{X}_2, ..., \overline{X}_N)$. Kako je istaknuto u toj napomeni, ta dva pristupa dat će općenito *istovjetne* rezultate ako je f linearna funkcija svojih ulaznih veličina (pod uvjetom da su kod primjene 1. pristupa uzeti u obzir eksperimentalnim opažanjem dobiveni koeficijenti korelacije). Ako f nije linearna funkcija, tada će se rezultati 1. pristupa razlikovati od rezultata 2. pristupa ovisno o stupnju nelinearnosti i procijenjenim varijancijama i kovarijancijama veličina X_i. To se može vidjeti iz izraza:

$$y = f(\overline{X}_1, \overline{X}_2, ..., \overline{X}_N) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2 f}{\partial \overline{X}_i\,\partial \overline{X}_j}\,u(\overline{X}_i, \overline{X}_j) + \ldots \tag{H.10}$$

gdje je drugi član na desnoj strani drugi član Taylorova reda razvoja funkcije f po $\overline{X}_i$ (vidi također podtočku 5.1.2, napomenu). U prikazanom slučaju prednost se daje 2. pristupu jer se njime izbjegava aproksimacija procjene $y = f(\overline{X}_1, \overline{X}_2, ..., \overline{X}_N)$ i jer bolje odražava upotrijebljeni mjerni postupak – podatci su u stvari bili prikupljeni u skupine.

S druge strane, 2. pristup bio bi neprikladan kad bi podatci u tablici H.2 predstavljali $n_1 = 5$ opažanja napona V praćeni s $n_2 = 5$ opažanja struje I i nakon toga s $n_3 = 5$ opažanja faze ϕ, a bio bi nemoguć ako bi bilo $n_1 \neq n_2 \neq n_3$. (Postupak provedbe mjerenja na taj način u stvari je loš jer je napon na stalnoj impedanciji izravno povezan sa strujom kroz tu impedanciju).

Ako se podatci u tablici H.2 tumače na takav način, tj. da je 2. pristup neprikladan i ako se pretpostavlja da ne postoje korelacije između veličina V, I i ϕ, tada opaženi koeficijenti korelacije nemaju značenja te treba uzeti da su jednaki ništici. Ako se to učini u tablici H.2, jednadžba (H.9) svodi se na jednadžbu istovjetnu jednadžbi (F.2) iz podtočke F.1.2.3, tj.:

$$u(y_l, y_m) = \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial y_l}{\partial x_i}\frac{\partial y_m}{\partial x_i}u^2(x_i), \tag{H.11}$$

a njezina primjena na podatke iz tablice H.2 dovodi do promjena u tablici H.3 koje su prikazane u tablici H.5.

Tablica H.5: Promjene u tablici H.3 pod pretpostavkom da su koeficijenti korelacije iz tablice H.2 jednaki ništici

Sastavljena standardna nesigurnost $u_c(y_l)$ mjernog rezultata
$u_c(R) = 0{,}195\ \Omega$ $u_c(R)/R = 0{,}15 \times 10^{-2}$
$u_c(X) = 0{,}201\ \Omega$ $u_c(X)/X = 0{,}09 \times 10^{-2}$
$u_c(Z) = 0{,}204\ \Omega$ $u_c(Z)/Z = 0{,}08 \times 10^{-2}$
Koeficijenti korelacije $r(y_l, y_m)$
$r(y_1, y_2) = r(R, X) = 0{,}056$ $r(y_1, y_3) = r(R, Z) = 0{,}527$ $r(y_2, y_3) = r(X, Z) = 0{,}878$

H.3 Umjeravanje toplomjera

Ovaj primjer zorno pokazuje uporabu metode najmanjih kvadrata za dobivanje linearne krivulje umjeravanja te način na koji se parametri prilagođivanja, presjek s ordinatom i nagib, te njihove varijancije i kovarijancije upotrebljavaju kako bi se iz te krivulje dobila standardna nesigurnost predviđenog ispravka.

H.3.1 Mjerni zadatak

Toplomjer se umjerava usporedbom $n = 11$ očitanja temperature t_k toga toplomjera, od kojih svako ima zanemarivu nesigurnost, s odgovarajućim poznatim referentnim temperaturama $t_{R,k}$ u temperaturnom području od 21 °C do 27 °C kako bi se dobili ispravci $b_k = t_{R,k} - t_k$ tih očitanja. *Izmjereni* ispravci b_k i *izmjerene* temperature t_k ulazne su veličine toga određivanja. Linearna krivulja umjeravanja:

$$b(t) = y_1 + y_2(t - t_0) \tag{H.12}$$

prilagođuje se izmjerenim ispravcima i temperaturama metodom najmanjih kvadrata. Parametri y_1 i y_2 koji redom čine presjek s ordinatom i nagib krivulje umjeravanja dvije su mjerene ili izlazne veličine koje treba odrediti. Temperatura t_0 dogovorno je odabrana točna referentna temperatura; to nije neovisan parametar koji treba odrediti prilagođivanjem metodom najmanjih kvadrata. Kad se jednom nađu y_1 i y_2 zajedno s njihovim varijancijama i kovarijancijama, za predviđanje vrijednosti temperature i standardne nesigurnosti ispravka koji treba primijeniti na toplomjer za svaku vrijednost temperature t može se upotrijebiti jednadžba (H.12).

H.3.2 Prilagođivanje metodom najmanjih kvadrata

Na temelju metode najmanjih kvadrata i pretpostavka učinjenih u podtočki H.3.1 izlazne veličine y_1 i y_2 i njihove procijenjene varijancije i kovarijancije dobivene su svođenjem na najmanju vrijednost zbroja:

$$S = \sum_{k=1}^{n} [b_k - y_1 - y_2(t_k - t_0)]^2$$

To daje sljedeće jednadžbe za izlazne veličine y_1 i y_2, za njihove eksperimentalne varijancije $s^2(y_1)$ i $s^2(y_2)$ i njihove procijenjene koeficijente korelacije $r(y_1, y_2) = s(y_1, y_2)/s(y_1)s(y_2)$, gdje je $s(y_1, y_2)$ njihova procijenjena kovarijancija:

$$y_1 = \frac{(\sum b_k)(\sum \theta_k^2) - (\sum b_k \theta_k)(\sum \theta_k)}{D} \tag{H.13a}$$

$$y_2 = \frac{n \sum b_k \theta_k - (\sum b_k)(\sum \theta_k)}{D} \tag{H.13b}$$

$$s^2(y_1) = \frac{s^2 \sum \theta_k^2}{D} \tag{H.13c}$$

$$s^2(y_2) = n \frac{s^2}{D} \tag{H.13d}$$

$$r(y_1, y_2) = -\frac{\sum \theta_k}{\sqrt{n \sum \theta_k^2}} \tag{H.13e}$$

$$s^2 = \frac{\sum [b_k - b(t_k)]^2}{n-2} \tag{H.13f}$$

$$D = n \sum \theta_k^2 - (\sum \theta_k)^2 = n \sum (\theta_k - \overline{\theta})^2 = n \sum (t_k - \overline{t})^2 \tag{H.13g}$$

gdje su svi zbrojevi uzeti od $k = 1$ do n, $\theta_k = t_k - t_0$, $\overline{\theta} = (\sum \theta_k)/n$ i $\overline{t} = (\sum t_k)/n$; $[b_k - b(t_k)]$ je razlika između izmjerenog ili opaženog ispravka b_k na temperaturi t_k i ispravka $b(t_k)$ previđenog prilagođenom krivuljom $b(t) = y_1 + y_2(t - t_0)$ na temperaturi t_k. Varijancija s^2 mjera je ukupne nesigurnosti prilagođivanja, pri čemu faktor $n - 2$ odražava činjenicu da je, zbog određivanja dvaju parametara (y_1 i y_2) iz n opažanja, broj stupnjeva slobode varijancije s^2 jednak $\nu = n - 2$ (vidi podtočku G.3.3).

H.3.3 Izračun rezultata

Podatci koje treba prilagoditi dani su u drugom i trećem stupcu tablice H.6. Uzimajući $t_0 = 20$ °C kao referentnu temperaturu, primjena jednačaba od (H.13a) do (H.13g) daje:

$y_1 = -0{,}171\,2$ °C $\qquad s(y_1) = 0{,}002\,9$ °C

$y_2 = 0{,}002\,18$ $\qquad s(y_2) = 0{,}000\,67$

$r(y_1, y_2) = -0{,}930$ $\qquad s = 0{,}003\,5$ °C

Činjenica da je nagib y_2 više od tri puta veći od njegove standardne nesigurnosti daje određenu naznaku da se zahtijeva krivulja umjeravanja, a ne čvrsti prosječni ispravak.

Krivulja umjeravanja može se tada napisati kao:

$$b(t) = -0{,}1712\ (29)\ °\mathrm{C} + 0{,}002\ 18(67)(t - 20\ °\mathrm{C}) \tag{H.14}$$

gdje su brojevi u zagradama brojčane vrijednosti standardnih nesigurnosti koje se odnose na posljednje znamenke navedenih rezultata za presjek i nagib (vidi podtočku 7.2.2). Ta jednadžba daje predskazanu vrijednost ispravka $b(t)$ na bilo kojoj temperaturi t, a posebno vrijednost $b(t_k)$ na temperaturi $t = t_k$. Te su vrijednosti dane u četvrtom stupcu tablice, dok su u posljednjem stupcu dane razlike između izmjerenih i predskazanih vrijednosti $b_k - b(t_k)$. Za provjeru valjanosti ovoga linearnog modela može se upotrijebiti analiza tih razlika; postoje i formalne provjere (vidi [8]), ali se u ovom primjeru ne razmatraju.

Tablica H.6: Podatci koji se upotrebljavaju za dobivanje krivulje umjeravanja toplomjera metodom najmanjih kvadrata

Broj očitanja k	**Očitanje toplomjera** t_k (°C)	**Ispravak dobiven opažanjem** $b_k = t_{R,k} - t_k$ (°C)	**Ispravak dobiven predviđanjem** $b(t_k)$ (°C)	**Razlika između ispravka opažanjem i ispravka dobivenog predviđanjem** $b_k - b(t_k)$ (°C)
1	21,521	–0,171	–0,167 9	–0,003 1
2	22,012	–0,169	–0,166 8	–0,002 2
3	22,512	–0,166	–0,165 7	–0,000 3
4	23,003	–0,159	–0,164 6	+0,005 6
5	23,507	–0,164	–0,163 5	–0,000 5
6	23,999	–0,165	–0,162 5	–0,002 5
7	24,513	–0,156	–0,161 4	+0,005 4
8	25,002	–0,157	–0,160 3	+0,003 3
9	25,503	–0,159	–0,159 2	+0,000 2
10	26,010	–0,161	–0,158 1	–0,002 9
11	26,511	–0,160	–0,157 0	–0,003 0

H.3.4 Nesigurnost predviđene vrijednosti

Izraz za sastavljenu standardnu nesigurnost predviđene vrijednosti može se stvarno lako dobiti primjenom zakona prijenosa nesigurnosti, jednadžba (16) iz podtočke 5.2.2, na jednadžbu (H.12). Uzimajući da je $b(t) = f(y_1, y_2)$ i pišući $u(y_1) = s(y_1)$ i $u(y_2) = s(y_2)$, dobiva se:

$$u_c^2[b(t)] = u^2(y_1) + (t - t_0)^2 u^2(y_2) + 2(t - t_0)\, u(y_1)\, u(y_2)\, r(y_1, y_2) \tag{H.15}$$

Procijenjena varijancija $u_c^2[b(t)]$ ima najmanju vrijednost u $t_{min} = t_0 - u(y_1)\, r(y_1, y_2)/u(y_2)$, što je u ovom slučaju jednako t_{min} = 24,008 5 °C.

Kao primjer uporabe jednadžbe (H.15) uzmimo da se zahtijeva ispravak pokazivanja toplomjera i njegova nesigurnost kod t = 30 °C, što je izvan temperaturnoga područja u kojem je toplomjer stvarno umjeren. Zamjena t = 30 °C u jednadžbi (H.14) daje:

$$b(30\ °\mathrm{C}) = -0{,}149\ 4\ °\mathrm{C}$$

dok jednadžba (H.15) postaje:

$$u_c^2[b(30\ °\mathrm{C})] = (0{,}002\ 9\ °\mathrm{C})^2 + (10\ °\mathrm{C})^2(0{,}000\ 67)^2 + 2(10\ °\mathrm{C})(0{,}002\ 9\ °\mathrm{C})(0{,}000\ 67)(-0{,}930)$$

$$= 17{,}1 \times 10^{-6}\ °\mathrm{C}^2$$

ili

$$u_c[b(30\ °\mathrm{C})] = 0{,}004\ 1\ °\mathrm{C}$$

Prema tomu, ispravak kod 30 °C jednak je –0,149 4 °C, sa sastavljenom nesigurnošću jednakom u_c = 0,004 1 °C koja ima $\nu = n - 2 = 9$ stupnjeva slobode.

H.3.5 Uklanjanje korelacije između nagiba i presjeka ordinate

Jednadžba (H.13e) za koeficijent korelacije $r(y_1, y_2)$ podrazumijeva da ako je t_0 odabrano tako da je $\sum_{k=1}^{n}\theta_k = \sum_{k=1}^{n}(t_k - t_0) = 0$, tada je $r(y_1, y_2) = 0$ te će y_1 i y_2 biti nekorelirani, čime se pojednostavnjuje izračun standardne nesigurnosti predviđenog ispravka. Budući da je $\sum_{k=1}^{n}\theta_k = 0$ kad je $t_0 = \bar{t} = (\sum_{k=1}^{n} t_k)/n$, a $\bar{t}$ = 24,008 5 °C u ovom slučaju, ponavljanje prilagođivanja po metodi najmanjih kvadrata s $t_0 = \bar{t}$ = 24,008 5 °C dovelo bi do vrijednosti y_1 i y_2 koje su nekorelirane. (Temperatura $\bar{t}$ također je temperatura na kojoj $u^2[b(t)]$ ima najmanju vrijednost – vidi podtočku H.3.4). Ipak ponavljanje prilagođivanja nije nužno jer se može pokazati da je:

$$b(t) = y_1' + y_2(t - \bar{t}) \tag{H.16a}$$

$$u_c^2[b(t)] = u^2(y_1') + (t - \bar{t})^2 u^2(y_2) \tag{H.16b}$$

$$r(y_1', y_2) = 0 \tag{H.16c}$$

gdje je:

$$y_1' = y_1 + y_2(\bar{t} - t_0)$$

$$\bar{t} = t_0 - s(y_1)\,r(y_1, y_2)/s(y_2)$$

$$s^2(y_1') = s^2(y_1)[1 - r^2(y_1, y_2)]$$

a u pisanju jednadžbe (H.16b) bile su učinjene zamjene $u(y_1') = s(y_1')$ i $u(y_2) = s(y_2)$ [vidi jednadžbu (H.15)].

Primjena tih odnosa na rezultate dane u podtočki H.3.3 daje:

$$b(t) = -0{,}162\,5(11) + 0{,}002\,18(67)(t - 24{,}008\,5\ ^\circ\mathrm{C}) \tag{H.17a}$$

$$u_c^2[b(t)] = (0{,}001\,1)^2 + (t - 24{,}008\,5\ ^\circ\mathrm{C})^2(0{,}000\,67)^2 \tag{H.17b}$$

Ponavljanjem izračuna ispravka b(30 °C) i nesigurnosti ispravka u_c [b(30 °C)] može se provjeriti da ti izrazi daju iste rezultate kao i jednadžbe (H.14) i (H.15). Uvrštenjem t = 30 °C u jednadžbe (H.17a) i (H.17b) dobiva se rezultat:

$$b(30\ ^\circ\mathrm{C}) = -0{,}149\,4\ ^\circ\mathrm{C}$$

$$u_c[b(30\ ^\circ\mathrm{C}] = 0{,}004\,1\ ^\circ\mathrm{C}$$

što je istovjetno rezultatima dobivenim u podtočki H.3.4. Procijenjene kovarijancije između dvaju predviđenih ispravaka $b(t_1)$ i $b(t_2)$ mogu se dobiti iz jednadžbe (H.9) iz podtočke H.2.3.

H.3.6 Druga razmatranja

Metoda najmanjih kvadrata može se upotrijebiti za prilagođivanje krivulja višeg reda podatcima, a također je primjenjiva i na slučajeve gdje ti pojedinačni podatci imaju nesigurnosti. Više podataka može se dobiti standardnim tekstovima o tom predmetu [8]. Međutim, ovi primjeri pokazuju dva slučaja gdje se ne pretpostavlja da su izmjereni ispravci b_k točno poznati.

1) Neka svaka vrijednost temperature t_k ima zanemarivu nesigurnost, neka je svaka od n vrijednosti $t_{R,k}$ dobivena iz niza od m opetovanih očitanja i neka je zbirna procjena varijancije za takva očitanja koja se temelji na velikoj količini podataka dobivenih kroz nekoliko mjeseci jednaka s_p^2. Tada je procijenjena varijancija svake vrijednosti $t_{R,k}$ jednaka $s_p^2/m = u_0^2$, a svaki opažanjem dobiveni ispravak $b_k = t_{R,k} - t_k$ ima *istu* standardnu nesigurnost u_0. U tim uvjetima (i pod pretpostavkom da nema razloga vjerovati da je linearni model neispravan) u jednadžbama (H.13c) i (H.13d) procijenjena varijancija u_0^2 zamjenjuje varijanciju s^2.

NAPOMENA: Zbirna procjena varijancije s_p^2 koja se temelji na N nizova neovisnih opažanja iste slučajne varijable dobiva se iz izraza:

$$s_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} \nu_i s_i^2}{\sum_{i=1}^{N} \nu_i}$$

gdje je s_i^2 eksperimentalna varijancija i-tog niza od n_i neovisnih opetovanih opažanja [jednadžba (4) u podtočki 4.2.2] s brojem stupnjeva slobode jednakim $\nu_i = n_i - 1$. Broj stupnjeva slobode varijancije s_p^2 jednak je $\nu = \sum_{i=1}^{N} \nu_i$. Eksperimentalna varijancija s_p^2/m (i eksperimentalno standardno odstupanje $s_p^2/\sqrt{m}$ aritmetičke srednje vrijednosti od m neovisnih opažanja opisanih zbirnom procjenom varijancije s_p^2 također ima ν stupnjeve slobode.

2) Pretpostavimo da svako očitanje t_k ima zanemarivu nesigurnost, da je na svaku od n vrijednosti $t_{R,k}$ primijenjen ispravak ε_k i da svaki ispravak ima istu standardnu nesigurnost u_a. Tada je standardna nesigurnost svakog ispravka $b_k = t_{R,k} - t_k$ također jednaka u_a, $s^2(y_1)$ se zamjenjuje sa $s^2(y_1) + u_a^2$, a $s^2(y_1')$ sa $s^2(y_1') + u_a^2$.

H.4 Mjerenje aktivnosti

Ovaj primjer sličan je primjeru H.2 (istodobno mjerenje otpora i reaktancije) u kojem se podatci mogu analizirati na dva različita načina, ali svaki u biti daje isti brojčani rezultat. Prvi pristup još jednom zorno prikazuje potrebu da se uzmu u obzir opažanjem utvrđene korelacije među ulaznim veličinama.

H.4.1 Mjerni problem

Nepoznata koncentracija aktivnosti radona (^{222}Rn) u uzorku vode određuje se brojenjem scintilacija kapljevine u odnosu na broj scintilacija etalonskog uzorka radona u vodi koji ima poznatu koncentraciju aktivnosti. Nepoznata koncentracija aktivnosti dobiva se mjerenjem triju izvora brojenja koji se sastoji približno od 5 g vode i 12 g organske emulzije scintilatora u posudicama obujma 22 ml:

Izvor (a) *etalon* koji se sastoji od etalonske otopine mase m_S poznate koncentracije aktivnosti;

Izvor (b) odabrani uzorak *čiste* vode koji ne sadržava radioaktivnu tvar, a koji služi za dobivanje broja scintilacija u jedinici vremena koje potječu od radioaktivnoga djelovanja sredine;

Izvor (c) *uzorak* koji sadržava alikvotni udio mase m_x nepoznate koncentracije aktivnosti.

Ovim redom provodi se šest ciklusa mjerenja triju izvora brojenja: etalon – neaktivna (čista) otopina – uzorak, a svaki interval brojenja T_0 (ispravljen za vrijeme neosjetljivosti za svaki izvor) tijekom svih šest ciklusa jednak je 60 minuta. Premda se ne može pretpostaviti da je broj scintilacija u jedinici vremena koje potječu od radioaktivnoga djelovanja sredine stalan u cijelom intervalu brojenja (65 sati), pretpostavlja se da se broj scintilacija izbrojenih za svaku neaktivnu otopinu može upotrijebiti kao reprezentativan broj scintilacija u jedinici vremena koje potječu od radioaktivnoga djelovanja sredine tijekom mjerenja etalona i uzorka u istom ciklusu. Ti podatci dani su u tablici H.7, gdje su:

t_S, t_B, t_x vremena mjerena od početnoga trenutka $t = 0$ do sredine intervala brojenja (ispravljenih za vrijeme neosjetljivosti) $T_0 = 60$ min, redom, za posudice s etalonom, neaktivnom otopinom i uzorkom; premda je radi potpunosti dano i vrijeme t_B, ono nije potrebno u analizi;

C_S, C_B, C_x broj scintilacija, redom, posudice s etalonom, čistom otopinom i uzorkom zabilježeni u intervalima brojenja $T_0 = 60$ min ispravljenim za vrijeme neosjetljivosti.

Opaženi brojevi scintilacija mogu se opisati izrazima:

$$C_S = C_B + \varepsilon A_S T_0 m_S e^{-\lambda t_S} \tag{H.18a}$$

$$C_x = C_B + \varepsilon A_x T_0 m_x e^{-\lambda t_x} \tag{H.18b}$$

gdje je:

ε	djelotvornost otkrivanja scintilacija kapljevine za ^{222}Rn za dani sastav izvora (pretpostavlja se neovisnom o razini aktivnosti)
A_S	koncentracija aktivnosti etalona u početnom trenutku $t = 0$
A_x	*mjerena veličina,* a određuje se kao nepoznata koncentracija aktivnosti uzorka u početnom trenutku $t = 0$
m_S	masa etalonske otopine
m_x	alikvotna masa uzorka
λ	stalnica raspada za ^{222}Rn: $\lambda = (\ln 2)/T_{1/2} = 1{,}258\ 94 \times 10^{-4}\ \text{min}^{-1}$ ($T_{1/2} = 5508{,}8$ min).

Tablica H.7: Podatci brojenja za određivanje koncentracije aktivnosti nepoznatog uzorka

Ciklus	Etalon		Neaktivna otopina		Uzorak	
k	t_S (min)	C_S (broj scint.)	t_B (min)	C_B (broj scint.)	t_x (min)	C_x (broj scint.)
1	243,74	15 380	305,56	4 054	367,37	41 432
2	984,53	14 978	1 046,10	3 922	1 107,66	38 706
3	1 723,87	14 394	1 785,43	4 200	1 846,99	35 860
4	2 463,17	13 254	2 524,73	3 830	2 586,28	32 238
5	3 217,56	12 516	3 279,12	3 956	3 340,68	29 640
6	3 956,83	11 058	4 018,38	3 980	4 079,94	26 356

Jednadžbe (H.18a) i (H.18b) pokazuju da se ni na jednu od šest pojedinačnih vrijednosti za C_S ili C_x danih u tablici H.7 ne može izravno izračunati prosječna vrijednost zbog eksponencijalnoga pada aktivnosti etalona i uzorka i blagih promjena u broju scintilacija u jedinici vremena koje potječu od radioaktivnoga djelovanja sredine od jednoga do drugoga ciklusa. Umjesto toga moraju se obrađivati brojevi scintilacija ispravljeni zbog raspada i djelovanja sredine (ili broj scintilacija u jedinici vremena određen brojem scintilacija podijeljenih s $T_0 = 60$ min). Rješavanjem jednačaba (H.18a) i (H.18b) dobije se za nepoznatu koncentraciju A_x ovaj izraz, u kojem je ta koncentracija dana s pomoću poznatih veličina:

$$
\begin{aligned}
A_x &= f(A_S, m_S, m_x, C_S, C_x, C_B, t_S, t_x, \lambda) \\
&= A_S \frac{m_S}{m_x} \frac{(C_x - C_B)\mathrm{e}^{\lambda t_x}}{(C_S - C_B)\mathrm{e}^{\lambda t_S}} \\
&= A_S \frac{m_S}{m_x} \frac{C_x - C_B}{C_S - C_B} \mathrm{e}^{\lambda (t_x - t_S)}
\end{aligned} \tag{H.19}
$$

gdje su $(C_x - C_B)\mathrm{e}^{\lambda t_x}$ i $(C_S - C_B)\mathrm{e}^{\lambda t_S}$ redom brojevi scintilacija uzorka i etalona u početnom trenutku $t = 0$ i za vremenski interval $T_0 = 60$ min ispravljeni zbog djelovanja sredine. Drukčije, jednostavno se može napisati:

$$A_x = f(A_S, m_S, m_x, R_S, R_x) = A_S \frac{m_S}{m_x} \frac{R_x}{R_S} \tag{H.20}$$

gdje su *brojevi scintilacija u jedinici vremena* (ispravljeni zbog djelovanja sredine) R_x i R_S dani izrazima:

$$R_x = [(C_x - \mathrm{C_B})/T_0]\mathrm{e}^{\lambda t_x} \tag{H.21a}$$

$$R_S = [(C_S - C_B)/T_0]\mathrm{e}^{\lambda t_S} \tag{H.21b}$$

H.4.2 Analiza podataka

U tablici H.8 sažeto su prikazane vrijednosti broja scintilacija u jedinici vremena R_S i R_x (ispravljene zbog djelovanja sredine i raspada) izračunane iz jednačaba (H.21a) i (H.21b) primjenom podataka iz tablice H.7 i $\lambda = 1{,}258\,94 \times 10^{-4}\ \mathrm{min}^{-1}$ kako je prije izneseno. Potrebno je napomenuti da se omjer $R = R_x / R_S$ najjednostavnije izračunava iz izraza:

$$[(C_x - C_B)/(C_S - C_B)]\,e^{\lambda(t_x - t_S)}$$

Aritmetičke sredine $\overline{R}_S$, $\overline{R}_x$ i $\overline{R}$ i njihova eksperimentalna standardna odstupanja $s(\overline{R}_S)$, $s(\overline{R}_x)$ i $s(\overline{R})$ izračunavaju se na uobičajen način [jednadžbe (3) i (5) u podtočki 4.2]. Koeficijent korelacije $r(\overline{R}_x, \overline{R}_S)$ izračunava se iz jednadžbe (17) iz podtočke 5.2.3 i jednadžbe (14) iz podtočke 5.2.2.

Zbog razmjerno male promjenljivosti vrijednosti R_x i R_S omjer srednjih vrijednosti $\overline{R}_x / \overline{R}_S$ i standardna nesigurnost $u(\overline{R}_x / \overline{R}_S)$ tog omjera gotovo su isti kao redom srednja vrijednost omjera $\overline{R}$ i njegovo eksperimentalno standardno odstupanje $s(\overline{R})$, kako je dano u posljednjem stupcu tablice H.8 [vidi podtočku H.2.4 i jednadžbu (H.10) u tome dodatku]. Međutim, pri izračunu standardne nesigurnosti $u(\overline{R}_x / \overline{R}_S)$ mora se uzeti u obzir korelacija između R_x i R_S opisana koeficijentom korelacije $r(\overline{R}_x / \overline{R}_S)$ primjenom jednadžbe (16) iz podtočke 5.2.2. [Ta jednadžba daje rezultat za relativnu procijenjenu varijanciju omjera $\overline{R}_x / \overline{R}_S$ posljednja tri člana jednadžbe (H.22b)].

Trebalo bi napomenuti da odgovarajuća eksperimentalna standardna odstupanja veličina R_x i R_S redom, $\sqrt{6}s(\overline{R}_x)$ i $\sqrt{6}s(\overline{R}_S)$ pokazuju da je promjenljivost tih veličina dva do tri puta veća od promjenljivosti koja se podrazumijeva Poissonovom statistikom procesa brojenja; posljednje je uključeno u opaženu promjenljivost izbrojenih scintilacija i ne treba se posebno uzimati u obzir.

Tablica H.8: Izračun broja scintilacija u jedinici vremena ispravljen za vrijeme raspada i broj scintilacija koje potječu od radioaktivnog djelovanja sredine

Ciklus k	R_x (min^{-1})	R_S (min^{-1})	$t_x - t_S$ (min)	$R = R_x / R_S$
1	652,46	194,65	123,63	3,352 0
2	666,48	208,58	123,13	3,195 3
3	665,80	211,08	123,12	3,154 3
4	655,68	214,17	123,11	3,061 5
5	651,87	213,92	123,12	3,047 3
6	623,31	194,13	123,11	3,210 7
	$\overline{R}_x = 652{,}60$ $s(\overline{R}_x) = 6{,}42$ $s(\overline{R}_x) / \overline{R}_x = 0{,}98 \times 10^{-2}$	$\overline{R}_S = 206{,}09$ $s(\overline{R}_S) = 3{,}79$ $s(\overline{R}_S) / \overline{R}_S = 1{,}84 \times 10^{-2}$		$\overline{R} = 3{,}170$ $s(\overline{R}) = 0{,}046$ $s(\overline{R}) / \overline{R} = 1{,}44 \times 10^{-2}$
	$\overline{R}_x / \overline{R}_S = 3{,}167$ $u(\overline{R}_x / \overline{R}_S) = 0{,}045$ $u\,(\overline{R}_x / \overline{R}_S) / (\overline{R}_x / \overline{R}_S) = 1{,}42 \times 10^{-2}$			
Koeficijent korelacije				
$r(\overline{R}_x / \overline{R}_S) = 0{,}646$				

H.4.3 Izračun konačnih rezultata

Da bi se iz jednadžbe (H.20) dobila nepoznata koncentracija aktivnosti A_x i njezina sastavljena standardna nesigurnost $u_c(A_x)$, potrebno je znati A_S, m_x *i* m_S i njihove standardne nesigurnosti. Njihove su vrijednosti jednake:

$A_S = 0{,}136\,8$ Bq/g
$u(A_S) = 0{,}001\,8$ Bq/g; $u(A_S)/A_S = 1{,}32 \times 10^{-2}$

$m_S = 5{,}019\,2$ g
$u(m_S) = 0{,}005$ g; $u(m_S)/m_S = 0{,}10 \times 10^{-2}$

$m_x = 5{,}057\,1$ g
$u(m_x) = 0{,}001\,0$ g; $u(m_x)/m_x = 0{,}02 \times 10^{-2}$

Procjenjuje se da su drugi mogući izvori nesigurnosti zanemarivi:

– standardne nesigurnosti vremena raspada, $u(t_{S,k})$ i $u(t_{x,k})$

– standardna nesigurnost stalnice raspada elementa ^{222}Rn, $u(\lambda) = 1 \times 10^{-7}$ min^{-1}. (Ta važna veličina jednaka je faktoru raspada $\exp[\lambda(t_x - t_S)]$, koji se mijenja od 1,015 63 za cikluse $k = 4$ i 6 do 1,015 70 za ciklus $k = 1$. Standardna nesigurnost tih vrijednosti jednaka je $u = 1{,}2 \times 10^{-5}$)

– nesigurnost pridružena mogućoj ovisnosti djelotvornosti otkrivanja brojila scintilacija o upotrijebljenom izvoru (etalon, neaktivna tvar i uzorak)

– nesigurnost ispravka zbog vremena neosjetljivosti brojila i ispravka zbog ovisnosti djelotvornosti brojenja o razini aktivnosti.

H.4.3.1 Rezultati: 1. pristup

Kako je prije pokazano, nepoznata aktivnost A_x i njezina sastavljena nesigurnost $u_c(A_x)$ mogu se dobiti iz jednadžbe (H.20) na dva različita načina. U prvom pristupu A_x izračunava se primjenom aritmetičkih sredina $\overline{R}_x$ i $\overline{R}_S$, što daje:

$$A_x = A_S \frac{m_S}{m_x} \frac{\overline{R}_x}{\overline{R}_S} = 0{,}430\,0 \text{ Bq/g} \qquad \text{(H.22a)}$$

Primjena jednadžbe (16) iz podtočke 5.2.2 na taj izraz daje za sastavljenu varijanciju $u_c^2(A_x)$:

$$\frac{u_c^2(A_x)}{A_x^2} = \frac{u^2(A_S)}{A_S^2} + \frac{u^2(m_S)}{m_S^2} + \frac{u^2(m_x)}{m_x^2} + \frac{u^2(\overline{R}_x)}{\overline{R}_x^2} + \frac{u^2(\overline{R}_S)}{\overline{R}_S^2} - 2r(\overline{R}_x, \overline{R}_S)\frac{u(\overline{R}_x)u(\overline{R}_S)}{\overline{R}_x \overline{R}_S} \qquad \text{(H.22b)}$$

gdje posljednja tri člana (kako je napomenuto u podtočki H.4.2) daju procijenjenu relativnu varijanciju $u^2(\overline{R}_x/\overline{R}_S)/(\overline{R}_x/\overline{R}_S)^2$ omjera $\overline{R}_x/\overline{R}_S$. Sukladno raspravi iz podtočke H.2.4, rezultati u tablici 8. pokazuju da srednja vrijednost omjera $\overline{R}$ nije točno jednaka omjeru srednjih vrijednosti $\overline{R}_x/\overline{R}_S$ te da standardna nesigurnost $u^2(\overline{R}_x/\overline{R}_S)$ omjera $\overline{R}_x/\overline{R}_S$ nije točno jednaka standardnoj nesigurnosti $s(\overline{R})$ srednje vrijednosti omjera $\overline{R}$.

Zamjena vrijednosti odgovarajućih veličina u jednadžbama (H.22a) i (H.22b) daje:

$$\frac{u_c(A_x)}{A_x} = 1{,}93 \times 10^{-2}$$

$$u_c(A_x) = 0{,}008\,3 \text{ Bq/g}$$

Mjerni rezultat može se tada iskazati kao:

$A_x = 0{,}430\,0$ Bq/g sa sastavljenom standardnom nesigurnošću $u_c = 0{,}008\,3$ Bq/g.

H.4.3.2 Rezultati: 2. pristup

U drugom pristupu, kojim se izbjegava koleracija između brojeva scintilacija u jedinici vremena $\overline{R}_x$ i $\overline{R}_\mathrm{S}$ nepoznata aktivnost A_x izračunava se uporabom aritmetičke sredine $\overline{R}$. Na taj se način dobiva:

$$A_x = A_\mathrm{S} \frac{m_\mathrm{S}}{m_x} \overline{R} = 0{,}430\ 4\ \mathrm{Bq/g} \tag{H.23a}$$

Izraz za $u_\mathrm{c}^2(A_x)$ jednostavno je jednak:

$$\frac{u_\mathrm{c}^2(A_x)}{A_x^2} = \frac{u^2(A_\mathrm{S})}{A_\mathrm{S}^2} + \frac{u^2(m_\mathrm{S})}{m_\mathrm{S}^2} + \frac{u^2(m_x)}{m_x^2} + \frac{u^2(\overline{R})}{\overline{R}^2} \tag{H.23b}$$

što daje:

$$\frac{u_\mathrm{c}(A_x)}{A_x} = 1{,}95 \times 10^{-2}$$

$$u_\mathrm{c}(A_x) = 0{,}008\ 4\ \mathrm{Bq/g}$$

Mjerni rezultat može se tada iskazati kao:

$A_x = 0{,}430\ 4$ Bq/g sa sastavljenom standardnom nesigurnošću $u_\mathrm{c} = 0{,}008\ 4$ Bq/g.

Stvarni broj stupnjeva slobode sastavljene standardne nesigurnosti u_c može se odrediti primjenom Welch-Satterthwaiteove formule kako je prikazano u podtočki H.1.6.

Kao i u podtočki H.2, i ovdje se prednost daje drugom rezultatu jer se njime izbjegava približno određivanje srednje vrijednosti omjera dviju veličina s pomoću omjera srednjih vrijednosti tih dviju veličina te on bolje odražava primijenjeni mjerni postupak – podatci su zaista prikupljeni u odvojenim ciklusima.

Ipak, razlika između vrijednosti nepoznate aktivnosti A_x koje nastaju iz tih dvaju pristupa mala je u usporedbi sa standardnim odstupanjem koje je pripisano svakom od njih, a razlika između te dvije standardne nesigurnosti u cijelosti je zanemariva. Takvo slaganje pokazuje da su ta dva pristupa istovjetna kad su na prikladan način uključene opažene korelacije.

H.5 Analiza varijancije

Ovaj primjer daje kratak uvod u metode analize varijancije (ANOVA-metode). Te statističke metode služe za utvrđivanje i kvantificiranje pojedinačnih *slučajnih djelovanja* pri mjerenju, tako da se ta djelovanja mogu na prikladan način uzeti u obzir kad se određuje vrijednost nesigurnosti mjernog rezultata. Premda su metode analize varijancije primjenljive na široko područje mjerenja, npr. umjeravanje referentnih etalona, kao što su Zenerovi naponski etaloni i etaloni mase te potvrđivanje referentnih tvari, samim metodama analize varijancije ne mogu se utvrditi moguća sustavna djelovanja koja bi mogla postojati.

Postoji mnoštvo različitih modela obuhvaćenih općim nazivom analiza varijancije (ANOVA). Zbog njegove važnosti u ovom se primjeru raspravlja o posebnom modelu – uravnoteženom planu umetanja. Brojčani prikaz tog modela uključuje umjeravanje Zenerova naponskog etalona; ta analiza trebala bi biti važna za različite praktične mjerne situacije.

ANOVA-metode imaju posebnu važnost u potvrđivanju referentnih tvari (RT) u međulaboratorijskim ispitivanjima; ta je tema u cijelosti obrađena u ISO uputama 35 [19] (za kratak opis takvoga potvrđivanja referentnih tvari vidi podtočku H.5.3.2). Budući da je veći dio građe sadržane u ISO uputama 35 u stvari šire primjenljiv, ta publikacija može poslužiti kao izvor za dodatne pojedinosti koje se odnose na ANOVA-metode, uključujući neuravnotežene planove umetanja. Slično mogu poslužiti i bibliografske uputnice [15] i [20].

H.5.1 Mjerni problem

Promatrajmo Zenerov naponski etalon nazivnog napona 10 V koji se tijekom razdoblja od dva tjedna umjerava prema postojanom naponskom referentnom etalonu. Tijekom tog razdoblja u svakom od J dana provede se K neovisnih opetovanih opažanja napona V_S Zenerova etalona. Ako s V_{jk} označimo k-to opažanje napona V_S (k = 1, 2, 3, ..., K) u j-tom danu (j = 1, 2, 3, ..., J), najbolja je procjena napona Zenerova etalona aritmetička sredina $\overline{V}$ tih JK opažanja [vidi jednadžbu (3) u podtočki 4.2.1],

$$V_S = \frac{1}{JK}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} V_{jk} = \overline{V} \tag{H.24a}$$

Eksperimentalno standardno odstupanje srednje vrijednosti $s(\overline{V})$, koje je mjera nesigurnosti srednje vrijednosti $\overline{V}$ kao procjena napona etalona, dobiva se iz izraza [vidi jednadžbu (5) u podtočki 4.2.3]:

$$s^2(\overline{V}) = \frac{1}{JK(JK-1)}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}(V_{jk}-\overline{V})^2 \tag{H.24b}$$

NAPOMENA: U ovom se primjeru pretpostavlja da svi ispravci primijenjeni na opažanja radi poništenja sustavnih djelovanja imaju zanemarive nesigurnosti ili da su njihove nesigurnosti takve da se one mogu uzeti u obzir na kraju analize. Ispravak u tom posljednjem razredu i ispravak koji se sam može primijeniti na srednju vrijednost opažanja na kraju analize, razlika je između potvrđene vrijednosti (za koju se pretpostavlja da ima danu nesigurnost) i radne vrijednosti stabilnoga naponskog referentnog etalona prema kojem je Zenerov naponski etalon umjeren. Prema tomu, procjena napona etalona dobivena statistički iz opažanja nije nužno konačni rezultat mjerenja, a eksperimentalno standardno odstupanje te procjene nije nužno sastavljena standardna nesigurnost konačnog rezultata.

Eksperimentalno standardno odstupanje srednje vrijednosti $s(\overline{V})$ dobiveno iz jednadžbe (H.24b) prikladna je mjera nesigurnosti srednje vrijednosti $\overline{V}$ samo ako je međudnevna (uočena u dva različita dana) promjenljivost opažanja ista kao promjenljivost opažanja provedenih u jednom danu. Ako postoji dokaz da je međudnevna promjenljivost znatno veća nego što se može očekivati od jednodnevne promjenljivosti, uporaba tog izraza mogla bi dovesti do znatno umanjene procjene nesigurnosti srednje vrijednosti $\overline{V}$. Prema tomu, postavljaju se dva pitanja: Na temelju čega bi trebalo odlučiti je li međudnevna promjenljivost (opisana međudnevnom sastavnicom varijancije) značajna u usporedbi s jednodnevnom promjenjivošću (opisanom jednodnevnom sastavnicom varijancije) i, ako jest, kako bi trebalo izračunavati nesigurnost srednje vrijednosti?

H.5.2 Brojčani primjer

H.5.2.1 Podatci koji omogućuju da se daju odgovori na gornja pitanja dani su u tablici H.9, gdje je:

J = 10, broj dana u kojima su bila provedena opažanja napona

K = 5, broj opažanja napona provedenih svaki dan

$$\overline{V}_j = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K} V_{jk} \tag{H.25a}$$

aritmetička srednja vrijednost K = 5 opažanja napona provedenih u j-tom danu (postoji J = 10 takvih srednjih vrijednosti)

$$\overline{V} = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}\overline{V}_j = \frac{1}{JK}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K} V_{jk} \tag{H.25b}$$

aritmetička srednja vrijednost $J = 10$ jednodnevnih srednjih vrijednosti i, prema tomu, sveukupna srednja vrijednost $JK = 50$ opažanja

$$s^2(V_{jk}) = \frac{1}{K-1}\sum_{k=1}^{K}(V_{jk} - \overline{V}_j)^2 \tag{H.25c}$$

eksperimentalna varijancija $K = 5$ opažanja provedenih u j-tom danu (postoji $J = 10$ takvih procjena varijancije)

$$s^2(\overline{V}_j) = \frac{1}{J-1}\sum_{j=1}^{J}(\overline{V}_j - \overline{V})^2 \tag{H.25d}$$

eksperimentalna varijancija $J = 10$ jednodnevnih srednjih vrijednosti (postoji samo jedna takva procjena varijancije).

H.5.2.2 Slaganje jednodnevne i međudnevne promjenljivosti opažanja može se istražiti usporedbom dviju neovisnih procjena jednodnevne sastavnice varijancije (tj. varijancije opažanja provedenih u istome danu) σ_w^2.

Prva procjena varijancije σ_w^2, koja se označuje sa s_a^2, dobiva se iz opažanja dobivene promjene jednodnevnih srednjih vrijednosti $\overline{V}_j$. Budući da je srednja vrijednost $\overline{V}_j$ jednaka prosječnoj vrijednosti K opažanja, njezina je procijenjena varijancija $s^2(\overline{V}_j)$, pod pretpostavkom da je međudnevna sastavnica varijancije jednaka ništici, procjena veličina σ_w^2/K. Iz jednadžbe (H.25d) tada slijedi da je:

$$s_\mathrm{a}^2 = Ks^2(\overline{V}_j) = \frac{K}{J-1}\sum_{j=1}^{J}(\overline{V}_j - \overline{V})^2 \tag{H.26a}$$

što je jednako procjeni varijancije σ_w^2 koja ima $\nu_\mathrm{b} = J - 1 = 9$ stupnjeva slobode.

Druga procjena varijancije σ_w^2, koja se označuje sa s_b^2, skupna je procjena varijancije dobivena primjenom jednadžbe iz napomene u podtočki H.3.6 iz $J = 10$ pojedinačnih vrijednosti $s^2(V_{jk})$, gdje je tih deset pojedinačnih vrijednosti izračunano iz jednadžbe (H.25c). Budući da je broj stupnjeva slobode jednak $\nu_i = K - 1$, konačni izraz za s_b^2 jednostavno je njihov prosjek. Prema tomu, može se napisati:

$$s_\mathrm{b}^2 = \overline{s^2(V_{jk})} = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}s^2(V_{jk}) = \frac{1}{J(K-1)}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}(V_{jk} - \overline{V}_j)^2 \tag{H.26b}$$

što je procjena varijancije σ_w^2 koja ima $\nu_\mathrm{a} = J(K - 1) = 40$ stupnjeva slobode.

Procjene varijancije σ_w^2 dane jednadžbom (H.26a) i (H.26b) redom su $s_\mathrm{a}^2 = (128\ \mu\mathrm{V})^2$ i $s_\mathrm{b}^2 = (85\ \mu\mathrm{V})^2$ (vidi tablicu H.9). Budući da se procjena s_a^2 temelji na promjenljivosti jednodnevnih srednjih vrijednosti, dok se procjena s_b^2 temelji na promjenljivosti jednodnevnih opažanja, njihova razlika pokazuje moguću prisutnost kakvog djelovanja koje se mijenja od jednoga do drugoga dana, ali koje ostaje razmjerno stalno kad se opažanja provode u bilo kojem jednom danu. Za provjeru te mogućnosti i, prema tomu, pretpostavke da je međudnevna sastavnica varijancije jednaka ništici primjenjuje se tzv. statistička F-provjera.

H.5.2.3 F-razdioba je razdioba vjerojatnosti omjera $F(\nu_\mathrm{a}, \nu_\mathrm{b}) = s_\mathrm{a}^2(\nu_\mathrm{a})/s_\mathrm{b}^2(\nu_\mathrm{b})$ dviju neovisnih procjena $s_\mathrm{a}^2(\nu_\mathrm{a})$ i $s_\mathrm{b}^2(\nu_\mathrm{b})$ varijancije σ^2 normalno raspodijeljene slučajne varijable [15]. Parametri ν_a i ν_b brojevi su stupnjeva slobode tih dviju procjena, a $0 \le F(\nu_\mathrm{a}, \nu_\mathrm{b}) < \infty$. Vrijednosti funkcije F prikazane su u tabličnom obliku za različite vrijednosti parametara ν_a i ν_b i različite kvantile F-razdiobe. Vrijednost $F(\nu_\mathrm{a}, \nu_\mathrm{b}) > F_{0,95}$ ili $F(\nu_\mathrm{a}, \nu_\mathrm{b}) > F_{0,975}$ (kritična vrijednost) obično se tumači kao pokazatelj da je procjena $s_\mathrm{a}^2(\nu_\mathrm{a})$ za statistički značajan iznos veća od procjene $s_\mathrm{b}^2(\nu_\mathrm{b})$ i, kad bi te dvije procjene bile procjene iste varijancije, da je vjerojatnost da vrijednost funkcije F bude jednaka opaženoj vrijednosti, manja redom od 0,05 ili 0,025. (Mogu se također odabrati i druge kritične vrijednosti kao npr. $F_{0,99}$).

Tablica H.9: Sažetak podataka o umjeravanju naponskog etalona dobivenih u $J = 10$ dana, s dnevnim srednjim vrijednostima $\overline{V}_j$ i eksperimentalnim standardnim odstupanjem $s(V_{jk})$ koje se temelje na $K = 5$ neovisnih opetovanih opažanja

Veličina	Dan (j)									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
$\overline{V}_j$ / V	10,000 172	10,000 116	10,000 013	10,000 144	10,000 106	10,000 031	10,000 060	10,000 125	10,000 163	10,000 041
$s(V_{jk})$ / µV	60	77	111	101	67	93	80	73	88	86
$\overline{V} = 10{,}000\,097$ V $\quad s(\overline{V}_j) = 57$ µV										
$s_a^2 = Ks^2(\overline{V}_j) = 5(57\ \mu V)^2 = (128\ \mu V)^2 \quad s_b^2 = s^2(V_{jk}) = (87\ \mu V)^2$										

H.5.2.4 Primjena F-provjere za prikazani brojčani primjer daje:

$$F(\nu_a, \nu_b) = \frac{s_a^2}{s_b^2} = \frac{Ks^2(\overline{V}_j)}{s^2(V_{jk})} = \frac{5(57\ \mu\text{V})^2}{(85\ \mu\text{V})^2} = 2{,}25 \qquad \text{(H.27)}$$

s $\nu_a = J - 1 = 9$ stupnjeva slobode u brojniku i $\nu_b = J(K - 1) = 40$ stupnjeva slobode u nazivniku. Budući da je $F_{0,95}(9,40) = 2{,}12$ i $F_{0,975}(9,40) = 2{,}45$, zaključuje se da postoji statistički značajno međudnevno djelovanje na 5-postotnoj razini značajnosti, ali ne i na 2,5-postotnoj razini.

H.5.2.5 Kad bi se postojanje međudnevnog djelovanja uklonilo, razlika između procjena s_a^2 i s_b^2 ne bi se smatrala statistički značajnom (što bi bila nerazumna odluka jer bi mogla dovesti do preniske procjene nesigurnosti), procijenjena varijancija $s^2(\overline{V})$ srednje vrijednosti $\overline{V}$ trebala bi se izračunavati iz jednadžbe (H.24b). Taj je odnos istovjetan objedinjavanju procjena s_a^2 i s_b^2 (tj. uzimanju prosječne vrijednosti procjena s_a^2 i s_b^2 tako da se one pomnože s težinskim faktorima jednakim njihovim brojevima stupnjeva slobode redom ν_a i ν_b [vidi podtočku H.3.6, napomenu] kako bi se dobila najbolja procjena varijancije tih opažanja te da bi se dijeljenjem te procjene s brojem opažanja JK dobila najbolja procjena $s^2(\overline{V})$ varijancije srednje vrijednosti tih opažanja. U skladu s tim postupkom dobiva se:

$$s^2(\overline{V}) = \frac{(J-1)s_a^2 + J(K-1)s_b^2}{JK(JK-1)} = \frac{9(128\ \mu\text{V})^2 + 40(85\ \mu\text{V})^2}{(10)(5)(49)} \qquad \text{(H.28a)}$$

$$s^2(\overline{V}) = (13\ \mu\text{V})^2 \quad \text{ili} \quad s(\overline{V}) = 13\ \mu\text{V} \qquad \text{(H.28b)}$$

s eksperimentalnim standardnim odstupanjem $s(\overline{V})$ koje ima $JK - 1 = 49$ stupnjeva slobode.

Ako se pretpostavi da su ispravci svih sustavnih djelovanja već uzeti u obzir i da su sve druge sastavnice nesigurnosti zanemarive, tada se rezultat umjeravanja može navoditi kao $V_S = \overline{V} = 10{,}000\ 097$ V (vidi tablicu H.9) sa sastavljenom standardnom nesigurnošću $s(\overline{V}) = u_c = 13$ µV koja ima 49 stupnjeva slobode.

NAPOMENE:

1. U praksi bi vrlo vjerojatno postojale dodatne sastavnice nesigurnosti koje bi bile značajne i, prema tomu, trebale bi se sastavljati sa sastavnicama nesigurnosti dobivenim statistički iz opažanja (vidi podtočku H.5.1, napomenu).

2. Zapisom jednadžbe (H.24b) u obliku dvostrukog zbroja označenog sa S može se prikazati da je jednadžba (H.28a) za procijenjenu varijanciju $s^2(V)$ istovjetna jednadžbi (H.24b):

$$S = \sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}[(V_{jk} - \overline{V}_j) + (\overline{V}_j - \overline{V})]^2 = (J-1)\,s_a^2 + J(K-1)s_b^2$$

H.5.2.6 Ako se prihvati postojanje međudnevnoga djelovanja (što je opravdana odluka jer se time izbjegava moguća umanjena procjena nesigurnosti) i ako se pretpostavi da je ono slučajno, tada varijancija $s^2(\overline{V}_j)$ izračunana iz $J = 10$ jednodnevnih srednjih vrijednosti u skladu s jednadžbom (H.25d) ne procjenjuje σ_w^2/K, kako je postulirano u podtočki H.5.2.2, nego $\sigma_w^2/K + \sigma_B^2$, gdje je σ_B^2 međudnevna slučajna sastavnica vrijancije. To povlači za sobom da je

$$s^2(\overline{V}_j) = s_w^2/K + s_B^2 \qquad \text{(H.29)}$$

gdje s_w^2 procjenjuje σ_w^2, a s_B^2 procjenjuje σ_B^2. Budući da $s^2(V_{jk})$ izračunano iz jednadžbe (H.26b) ovisi samo o jednodnevnoj promjenljivosti opažanja, može se uzeti da je $s_w^2 = s^2(V_{jk})$. Prema tomu, omjer $Ks^2(\overline{V}_j)/s^2(V_{jk})$ koji se upotrebljava za F-provjeru iz podtočke H.5.2.4 postaje:

$$F = \frac{Ks^2(\overline{V}_j)}{s^2(V_{jk})} = \frac{s_w^2 + Ks_B^2}{s_w^2} = \frac{5(57\ \mu\text{V})^2}{(85\ \mu\text{V})^2} = 2{,}25 \qquad \text{(H.30)}$$

to vodi na:

$$s_B^2 = \frac{Ks^2(\overline{V}_j) - \overline{s^2(V_{jk})}}{K}$$

$$s_B^2 = (43\ \mu V)^2, \quad \text{ili} \quad s_B = 43\ \mu V \tag{H.31a}$$

$$s_w^2 = \overline{s^2(V_{jk})} = (85\ \mu V)^2, \quad \text{ili} \quad s_w = 85\ \mu V \tag{H.31b}$$

Procijenjena varijancija srednje vrijednosti $\overline{V}$ dobiva se iz $s^2(\overline{V}_j)$, jednadžba (H.25d), budući da $s^2(\overline{V}_j)$ ispravno izražava i jednodnevnu i međudnevnu slučajnu sastavnicu varijancije [vidi jednadžbu (H.26b)]. Dakle, procijenjena varijancija, odnosno procijenjeno standardno odstupanje srednje vrijednosti jednako je:

$$s^2(\overline{V}) = s^2(\overline{V}_j)/J$$

$$= (57\ \mu V)^2/10 \quad \text{ili} \quad s(\overline{V}) = 18\ \mu V \tag{H.32}$$

gdje $s(\overline{V})$ ima $J - 1 = 9$ stupnjeva slobode.

Broj stupnjeva slobode varijancije s_w^2 (i prema tomu standardnog odstupanja s_w) jednak je $J(K - 1) = 40$ [vidi jednadžbu (H.26b)]. Broj stupnjeva slobode varijancije s_B^2 (i prema tomu standardnog odstupanja s_B) stvarni je broj stupnjeva slobode razlike $s_B^2 = s^2(\overline{V}_j) - \overline{s^2(V_{jk})}/K$ [jednadžba (H.31a)], ali je njezina procjena neizvjesna.

H.5.2.7 Najbolja je procjena napona naponskog etalona, prema tomu, $V_S = \overline{V} = 10{,}000\,097$ V sa $s(\overline{V}) = u_c = 18\ \mu V$, kako je dano jednadžbom (H.32). Ta vrijednost nesigurnosti u_c i njezinih 9 stupnjeva slobode trebaju se uspoređivati s nesigurnošću $u_c = 13\ \mu V$ i njezinih 49 stupnjeva slobode; rezultat je dobiven u podtočki H.5.2.5 [jednadžba (H.28b)] kad je potisnuto postojanje međudnevnog djelovanja.

U stvarnom mjerenju očito međudnevno djelovanje trebalo bi se nadalje, ako je to moguće, istraživati da bi se odredio njegov uzrok i da bi se odredilo postoji li sustavno djelovanje koje bi osporavalo uporabu metoda analize varijancije. Kako je naglašeno na početku ovog primjera, metode analize varijancije zamišljene su za identifikaciju i određivanje sastavnica nesigurnosti koje potječu od slučajnih djelovanja; one ne mogu dati podatke o sastavnicama koje potječu od sustavnih djelovanja.

H.5.3 Uloga analize varijancije (ANOVA) u mjerenju

H.5.3.1 Ovaj primjer naponskog etalona zorno prikazuje ono što se općenito naziva uravnoteženim jednostupanjskim planom. To je ujednačeni model s jednim čimbenikom (jednofaktorski model) jer postoji samo jedan faktor (dan u kojem se provodi opažanje) koji se mijenja tijekom mjerenja. On je uravnotežen jer se svaki dan provodi isti broj opažanja. Analiza prikazana u tom primjeru može poslužiti za određivanje postoji li u pojedinačnom mjerenju "djelovanje poslužitelja", "djelovanje uzorka" ili čak "djelovanje metode". Dakle, u tom primjeru moglo bi se zamisliti da se opažanja provedena u J različitih dana zamijene opažanjima provedenim u istom danu, ali s J različitih poslužitelja; međudnevna sastavnica varijancije postala bi tada sastavnica varijancije pridružene različitim poslužiteljima.

H.5.3.2 Kako je napomenuto u podtočki H.5, metode analize varijancije široko se upotrebljavaju u potvrđivanju referentnih tvari (RT) u tzv. međulaboratorijskim ispitivanjima. Takvo potvrđivanje obično obuhvaća niz neovisnih mjerenja uzoraka tvari čije svojstvo potvrđuju laboratoriji iste sposobnosti. Općenito se pretpostavlja da su razlike između pojedinih rezultata u laboratoriju i među laboratorijima statističke naravi, bez obzira na njihove uzroke. Srednja vrijednost svakog laboratorija smatra se nepristranom procjenom svojstva tvari, a obično se srednja vrijednost srednjih vrijednosti tog laboratorija bez težinskih faktora smatra najboljom procjenom tog svojstva.

Potvrđivanje referentnih tvari može uključivati I različitih laboratorija, od kojih svaki mjeri pripadno svojstvo J različitih uzoraka tvari, a svako se mjerenje uzorka sastoji od K neovisnih opetovanih opažanja. Dakle ukupni broj opažanja jednak je IJK, a ukupni broj uzoraka jednak je IJ. To je primjer uravnoteženog modela s dva faktora (dvofaktorskog modela) analognog modelu s jednim faktorom iz gornjega primjera naponskog etalona. U tom slučaju postoje dva različita faktora, uzorak i laboratorij koji se mijenjaju tijekom mjerenja. Taj model je uravnotežen jer se svaki uzorak opaža isti broj puta (K) u svakom laboratoriju, a svaki laboratorij mjeri isti broj uzoraka (J). U daljnjoj analogiji s primjerom naponskog etalona, u slučaju RT svrha je analize podataka da se istraži moguće postojanje djelovanja između uzoraka i djelovanja između laboratorija te odredi ispravna nesigurnost za pridjeljivanje najbolje procjene vrijednosti svojstva koje treba potvrditi. Sukladno prethodnom stavku, prema kojem se pretpostavlja da procjena treba biti srednja vrijednost srednjih vrijednosti I laboratorija, što je također srednja vrijednost iz IJK opažanja.

H.5.3.3 Važnost mijenjanja ulaznih veličina o kojima ovisi mjerni rezultat tako da se njegova nesigurnost temelji na opažanjem dobivenim podatcima statistički izračunanim naglašena je u podtočki 3.4.2. Modeli i analiza konačnih podataka metodama analize varijancije mogu se uspješno primjenjivati u mnogim mjernim situacijama koje se susreću u praksi.

Ipak, kako je pokazano u podtočki 3.4.1, mijenjanje svih ulaznih veličina rijetko je izvodivo zbog ograničenog vremena i izvora; u najboljem slučaju, u većini praktičnih mjernih situacija, jedino je moguće odrediti nekoliko sastavnica nesigurnosti primjenom metoda analize varijancije. Kako je naglašeno u podtočki 4.3.1, mnoge sastavnice moraju se odrediti znanstvenom prosudbom upotrebljavajući sve dostupne podatke o mogućoj promjenljivosti promatranih ulaznih veličina; u mnogim slučajevima kakva sastavnica nesigurnosti, kao npr. sastavnica nesigurnosti koja potječe od djelovanja među uzorcima, djelovanja među laboratorijima, djelovanja među instrumentima ili djelovanja među poslužiteljima, ne može se izračunati statističkom analizom niza opažanja, ali se mora odrediti iz skupa dostupnih podataka.

H.6 Mjerenja na referentnoj ljestvici: tvrdoća

Tvrdoća je primjer fizičkog pojma koji se ne može kvantificirati bez referencije (upućivanja) na mjernu metodu; ona nema jedinicu koja je neovisna o takvoj metodi. Veličina "tvrdoća" razlikuje se od klasičnih mjerljivih veličina po tome što se ne može uvrštavati u algebarske jednadžbe za određivanje drugih mjerljivih veličina (premda se katkad upotrebljava u iskustvenim jednadžbama koje za kakav razred gradiva povezuju tvrdoću s kojim drugim svojstvom gradiva). Njezina velikoća određuje se dogovorenim mjerenjem, tj. mjerenjem linearne dimenzije otiska u promatranom bloku gradiva ili *bloku uzorka*. To se mjerenje provodi u skladu s pisanom normom, koja uključuje opis "utiskivala", konstrukciju stroja kojim se utiskivalo primjenjuje (na blok gradiva) i način na koji taj stroj treba raditi. Postoji više pisanih normi tako da ima i više ljestvica tvrdoće.

Iskazana je tvrdoća funkcija (ovisno o ljestvici) mjerene linearne dimenzije. U primjeru danom u ovoj točki ona je linearna funkcija aritmetičke sredine ili prosjeka dubina pet opetovanih utiskivanja, ali za neke druge ljestvice ta je funkcija nelinearna.

Ostvarenja etalonskog stroja čuvaju se kao državni etaloni (ostvarenje međunarodnog etalona ne postoji); usporedba između pojedinog stroja i *državnog etalonskog stroja* provodi se uporabom *etalonskoga prijenosnoga bloka.*

H.6.1 Mjerni problem

U ovome se primjeru tvrdoća bloka uzorka gradiva određuje prema Rockwellovoj C-ljestvici uporabom stroja koji je umjeren prema državnom etalonskom stroju. Jedinica Rockwellove C-ljestvice tvrdoće jednaka je 0,002 mm, pri čemu se tvrdoća na toj ljestvici određuje kao 100 × (0,002 mm) manje prosječna vrijednost od pet dubina utiskivanja izmjerenih u mm. Vrijednost te veličine podijeljena jedinicom Rockwellove ljestvice 0,002 mm naziva se "HRC pokazateljem tvrdoće". U ovom primjeru ta se veličina jednostavno naziva "tvrdoćom" (znak $h_{\text{Rockwell C}}$), a brojčana vrijednost tvrdoće izražava se u Rockwellovim jedinicama duljine i naziva "pokazateljem tvrdoće" (znak $H_{\text{Rockwell C}}$).

H.6.2 Matematički model

Kako bi se odredila prosječna dubina utiskivanja koja bi se načinila na bloku uzorka državnim etalonskim strojem, moraju se dodati ispravci prosječnoj dubini utiskivanja načinjenim na tom istom bloku strojem koji služi za određivanje njegove tvrdoće (*stroj za umjeravanje*). Prema tomu, može se napisati:

$$h_{\text{Rockwell C}} = f(\overline{d}, \Delta_c, \Delta_b, \Delta_S)$$

$$= 100(0{,}002\text{ mm}) - \overline{d} - \Delta_c - \Delta_b - \Delta_S \quad \text{(H.33a)}$$

$$H_{\text{Rockwell C}} = h_{\text{Rockwell C}}/(0{,}002\text{ mm}) \quad \text{(H.33b)}$$

gdje je:

$\overline{d}$ prosječna dubina pet utiskivanja načinjenih strojem za umjeravanje na bloku uzorka;

Δ_c ispravak dobiven usporedbom stroja za umjeravanje, uporabom prijenosnog etalonskog bloka, s državnim etalonskim strojem, jednak prosječnoj dubini od $5m$ utiskivanja načinjenih državnim etalonskim strojem u tom bloku manje prosječna dubina od $5n$ utiskivanja načinjenih u tom istom bloku strojem za umjeravanje;

Δ_b razlika u tvrdoći (izražena kao razlika prosječne dubine utiskivanja) između dvaju dijelova prijenosnoga etalonskog bloka koji su upotrijebljeni za utiskivanje s pomoću dvaju strojeva (pretpostavlja se da je jednaka ništici);

Δ_S pogrješka zbog pomanjkanja ponovljivosti državnoga etalonskog stroja i nepotpune definicije tvrdoće kao veličine. Premda se za pogrješku Δ_S mora pretpostavljati da je jednaka ništici, ona ima pridruženu standardnu nesigurnost jednaku $u(\Delta_S)$.

Budući da su sve parcijalne derivacije $\partial f/\partial \overline{d}$, $\partial f/\partial \Delta_c$, $\partial f/\partial \Delta_b$ i $\partial f/\partial \Delta_S$ funkcije iz jednadžbe (H.33a) jednake –1, sastavljena standardna nesigurnost $u_c^2(h)$ tvrdoće bloka uzorka izmjerena strojem za umjeravanje jednostavno je dana izrazom:

$$u_c^2(h) = u^2(\overline{d}) + u^2(\Delta_c) + u^2(\Delta_b) + u^2(\Delta_S) \quad \text{(H.34)}$$

gdje je zbog jednostavnosti zapisa stavljeno $h \equiv h_{\text{Rockwell C}}$.

H.6.3 Varijancije doprinosa nesigurnosti

H.6.3.1 Nesigurnost prosječne dubine utiskivanja $\overline{d}$ bloka uzorka, $u(\overline{d})$

Nesigurnost opetovanih opažanja. Strogo opetovanje opažanja nije moguće jer se novo utiskivanje ne može načiniti na mjestu gdje su načinjena prijašnja utiskivanja. Budući da se svako utiskivanje mora načiniti na različitom mjestu, bilo koja promjena rezultata uključuje djelovanje promjena tvrdoće između različitih mjesta. Na taj se način uzima se da je $u(\overline{d})$, standardna nesigurnost prosječne dubine od pet utiskivanja u blok uzorka strojem za umjeravanje, jednaka $s_p(d_k)/\sqrt{5}$, gdje je $s_p(d_k)$ skupno eksperimentalno standardno odstupanje dubina utiskivanja određeno "opetovanim" mjerenjima na bloku za koji je poznato da ima veoma jednoličnu tvrdoću (vidi podtočku 4.2.4).

Nesigurnost pokazivanja. Premda je ispravak prosječne dubine $\overline{d}$ izazvan pokazivanjem stroja za umjeravanje jednak ništici, zbog nesigurnosti pokazivanja dubine nastale zbog razlučivanja δ prikaza postoji nesigurnost prosječne vrijednosti $\overline{d}$ dana izrazom $u^2(\delta) = \delta^2/12$ (vidi podtočku F.2.2.1). Procijenjena varijancija prosječne dubine $\overline{d}$ jednaka je prema tomu:

$$u^2(\overline{d}) = s^2(d_k)/5 + \delta^2/12 \quad \text{(H.35)}$$

H.6.3.2 Nesigurnost ispravka zbog razlike između dvaju strojeva, $u(\Delta_c)$

Kako je pokazano u podtočki H.6.2, Δ_c je ispravak zbog razlike između državnoga etalonskog stroja i stroja za umjeravanje. Taj ispravak može se izraziti kao $\Delta_c = z'_S - z'$, gdje je $z'_S = (\sum_{i=1}^{m} \overline{z}_{S,i})/m$ prosječna dubina od $5m$ utiskivanja načinjenih državnim etalonskim strojem u prijenosnom etalonskom bloku; a $z' = (\sum_{i=1}^{m} \overline{z}_i)/n$ prosječna dubina od $5n$ utiskivanja načinjenih u istom bloku strojem za umjeravanje. Prema tomu, pretpostavljajući da je za usporedbu nesigurnost nastala zbog razlučivanja prikaza svakog stroja zanemariva, procijenjena varijancija ispravka Δ_c jednaka je:

$$u^2(\Delta_c) = \frac{s_{av}^2(\overline{z}_S)}{m} + \frac{s_{av}^2(\overline{z})}{n} \tag{H.36}$$

gdje je:

$s_{av}^2(\overline{z}_S) = [\sum_{i=1}^{m} s^2(\overline{z}_{S,i})]/m$ prosječna vrijednost eksperimentalnih varijancija srednjih vrijednosti svakog od m nizova utiskivanja $z_{S,ik}$ načinjenih etalonskim strojem;

$s_{av}^2(\overline{z}) = [\sum_{i=1}^{n} s^2(\overline{z}_i)]/n$ prosječna vrijednost eksperimentalnih varijancija srednjih vrijednosti svakog od n nizova utiskivanja z_{ik} načinjenih strojem za umjeravanje.

NAPOMENA: Varijancije $s_{av}^2(\overline{z}_S)$ i $s_{av}^2(\overline{z})$ skupne su procjene varijancije [vidi jednadžbu (H.26b) u podtočki H.5.2.2].

H.6.3.3 Nesigurnost ispravka zbog varijancija tvrdoće prijenosnoga etalonskog bloka, $u(\Delta_b)$

Preporuka R 12, *Ovjeravanje i umjeravanje etalonskih blokova tvrdoće prema Rockwellovoj C-ljestvici,* Međunarodne organizacije za zakonsko mjeriteljstvo zahtijeva da su najveća i najmanja dubina utiskivanja dobivene iz pet mjerenja na prijenosnom etalonskom bloku ne smije razlikovati za više od dijela x prosječne dubine utiskivanja, gdje je x funkcija razine tvrdoće. Neka je, prema tomu, najveća razlika u dubinama utiskivanja preko cijeloga bloka jednaka xz', gdje je prosječna dubina z' određena u podtočki H.6.3.2 iz $n = 5$ utiskivanja. Neka se također najveća razlika opisuje trokutnom razdiobom vjerojatnosti oko prosječne vrijednosti $xz'/2$ (uz vjerojatnu pretpostavku da su vrijednosti u blizini središnje vrijednosti vjerojatnije od krajnjih vrijednosti – vidi podtočku 4.3.9). Ako se u jednadžbi (9b) u podtočki 4.3.9 uzme $a = xz'/2$, tada je procijenjena varijancija ispravka prosječne dubine utiskivanja nastala zbog razlike tvrdoća koje pokazuju redom etalonski stroj i stroj za umjeravanje jednaka:

$$u^2(\Delta_b) = (xz')^2/24 \tag{H.37}$$

Kako je pokazano u podtočki H.6.2, pretpostavlja se da je najbolji ispravak Δ_b sam jednak ništici.

H.6.3.4 Nesigurnost državnog etalonskog stroja i definicije tvrdoće, $z(\Delta_S)$

Nesigurnost etalonskoga državnog stroja zajedno s nesigurnošću zbog nepotpune definicije tvrdoće kao fizičke veličine navodi se kao procijenjeno standardno odstupanje $u(\Delta_S)$ (veličina s dimenzijom *duljine*).

H.6.4 Sastavljena standardna nesigurnost, $u_c(h)$

Prikupljanje pojedinačnih članova o kojima se raspravljalo u podtočkama od H.6.3.1 do H.6.3.4 i njihovo uvrštenje u jednadžbu (H.3.4) daje za procijenjenu varijanciju mjerenja tvrdoće:

$$u_c^2(h) = \frac{s^2(d_k)}{5} + \frac{\delta^2}{12} + \frac{s_{av}^2(\overline{z}_S)}{m} + \frac{s_{av}^2(\overline{z})}{n} + \frac{(xz')^2}{24} + u^2(\Delta_S) \tag{H.38}$$

a sastavljena standardna nesigurnost jednaka je $u_c(h)$.

H.6.5 Brojčani primjer

Podatci iz ovog primjera sažeto su prikazani u tablici H.10.

Tablica H.10: Sažeti prikaz podataka za određivanje tvrdoće bloka uzorka na Rockwellovoj C ljestvici

Izvor nesigurnosti	Vrijednost
Prosječna dubina $\overline{d}$ 5 utiskivanja načinjenih strojem za umjeravanje u bloku uzorka; 0,072 mm ljestvice	36,0 jedinica Rockwellove ljestvice
Prikazano kazalo tvrdoće bloka uzorka iz 5 utiskivanja $H_{\text{Rockwell C}} = h_{\text{Rockwell C}}/(0{,}002\ \text{mm}) = [100(0{,}002\ \text{mm}) - 0{,}072\ \text{mm}]/(0{,}002\ \text{mm})$ (vidi podtočku H.6.1)	64,0 HRC
Zbirno standardno odstupanje $s_p(d_k)$ dubine utiskivanja načinjenih strojem za umjeravanje u bloku koji ima jednoliku tvrdoću	0,45 jedinica Rockwellove ljestvice
Razlučivanje δ prikaza stroja za umjeravanje	0,1 jedinica Rockwellove ljestvice
$s_{\text{av}}^2(\overline{z}_{\text{S}})$, drugi korijen prosječne vrijednosti eksperimentalnih varijancija srednjih vrijednosti m utiskivanja načinjenih državnim etalonskim strojem u prijenosnom etalonskom bloku	0,10 jedinica Rockwellove ljestvice, $m = 6$
$s_{\text{av}}^2(\overline{z})$, drugi korijen prosjeka eksperimentalnih varijancija srednjih vrijednosti od nizova utiskivanja načinjenih strojem za umjeravanje u prijenosnom etalonskom bloku	0,11 jedinica Rockwellove ljestvice, $n = 6$
Dopuštena promjena x dubine utiskivanja u prijenosni etalonski blok	$1{,}5 \times 10^{-2}$
Standardna nesigurnost $u(\Delta_{\text{S}})$ državnog etalonskog stroja i definicija tvrdoće	0,5 jedinica Rockwellove ljestvice

Ljestvica tvrdoće Rockwellova je C-ljestvica, koja se označuje sa HRC. Jedinica Rockwellove ljestvice je 0,002 mm, i, prema tomu, u tablici H.10 i u daljnjem tekstu podrazumijeva se da (npr.) "36,0 jedinica Rockwellove ljestvice" znači 36,0 × (0,002 mm) = 0,072 mm te da je to jednostavno prikladan način iskazivanja podataka i rezultata.

Ako se vrijednosti bitnih veličina danih tablicom H.10 uvrste u jednadžbu (H.38) dobiva se ovaj izraz:

$$u_c^2(h) = \left[\frac{0{,}45^2}{5} + \frac{0{,}1^2}{12} + \frac{0{,}10^2}{6} + \frac{0{,}11^2}{6} + \frac{(0{,}015 \times 36{,}0)^2}{24} + 0{,}5^2\right] (\text{jedinica Rockwellove ljestvice})^2 =$$

$$= 0{,}307\ (\text{jedinica Rockwellove ljestvice})^2$$

$$u_c(h) = 0{,}55\ \text{jedinica Rockwellove ljestvice} = 0{,}001\ 1\ \text{mm}.$$

gdje je u svrhu izračuna nesigurnosti prikladno uzeti $z' = \overline{d} = 36{,}0$ jedinica Rockwellove ljestvice.

Prema tomu, ako se pretpostavi da je $\Delta_c = 0$, tvrdoća bloka uzorka jednaka je:

$h_{\text{Rockwell C}} = 64{,}0$ jedinica Rockwellove ljestvice ili 0,128 0 mm sa sastavljenom standardnom nesigurnošću $u_c = 0{,}55$ jedinica Rockwellove ljestvice ili 0,001 1 mm.

Pokazatelj tvrdoće tog bloka je $h_{\text{Rockwell C}}/(0{,}002\ \text{mm}) = (0{,}128\ 0\ \text{mm})/(0{,}002\ \text{mm})$ ili

$H_{\text{Rockwell C}} = 64{,}0$ HRC sa sastavljenom standardnom nesigurnošću $u_c = 0{,}55$ HRC.

Osim sastavnica nesigurnosti zbog državnog etalonskog stroja i definicije tvrdoće, $u(\Delta_{\text{S}}) = 0{,}5$ jedinica Rockwellove ljestvice, značajne su sastavnice nesigurnosti one sastavnice koje su posljedica ponovljivosti stroja za umjeravanje, $s_p(d_k)/\sqrt{5} = 0{,}20$ jedinica Rockwellove ljestvice, i promjene tvrdoće prijenosnoga etalonskog bloka, koja je jednaka $(xz')^2/24 = 0{,}11$ jedinica Rockwellove ljestvice. Stvarni broj stupnjeva slobode sastavljene nesigurnosti u_c može se izračunati primjenom Welch-Satterthwaiteove formule na način prikazan u podtočki H.1.6.

Dodatak J*

Tumač glavnih znakova

a	poluširina pravokutne razdiobe mogućih vrijednosti ulazne veličine X_i: $a = (a_+ - a_-)/2$
a_+	gornja granica ulazne veličine X_i
a_-	donja granica ulazne veličine X_i
b_+	gornja granica odstupanja ulazne veličine X_i od njezine procjene x_i: $b_+ = a_+ - x_i$
b_-	donja granica odstupanja ulazne veličine X_i od njezine procjene x_i: $b_- = x_i - a_-$
c_i	parcijalna derivacija ili koeficijent osjetljivosti: $c_i \equiv \partial f / \partial x_i$
f	funkcijski odnos između mjerene veličine Y i ulaznih veličina X_i o kojima Y ovisi te između procjene y izlazne veličine i procjena ulaznih veličina x_i o kojima y ovisi
$\partial f / \partial x_i$	parcijalna derivacija funkcije f (koja povezuje mjerenu veličinu Y i ulazne veličine X_i o kojima Y ovisi) po ulaznoj veličini X_i izračunana s procjenom x_i za veličine X_i: $\partial f / \partial x_i = \partial f / \partial X_i \vert x_1, x_2, ..., x_N$
k	faktor pokrivanja koji se upotrebljava za izračun povećane nesigurnosti $U = ku_c(y)$ izlazne veličine iz njezine sastavljene standardne nesigurnosti $u_c(y)$, gdje U određuje interval $Y = y \pm U$ koji ima visoku razinu povjerenja
k_p	faktor pokrivanja koji se upotrebljava za izračunavanje povećane nesigurnosti $U_p = k_p u_c(y)$ procjene izlazne veličine y iz njezine sastavljene nesigurnosti $u_c(y)$, gdje U_p određuje interval $Y = y \pm U_p$ koji ima visoku određenu razinu povjerenja p
n	broj opetovanih opažanja
N	broj ulaznih veličina X_i o kojima ovisi mjerena veličina Y
p	vjerojatnost; razina povjerenja: $0 \leq p \leq 1$
q	slučajna veličina koju opisuje razdioba vjerojatnosti
$\overline{q}$	aritmetička sredina ili prosjek n neovisnih opetovanih opažanja q_k veličine q koja se mijenja na slučajan način: procjena očekivanja ili srednje vrijednosti μ_q razdiobe vjerojatnosti veličine q
q_k	k-to neovisno opetovano opažanje slučajne veličine q

* **Fusnota uz verziju iz 2008. godine:**

Kad je GUM prvi puta objavljen, postojalo je uređivačko pravilo koje je zabranjivalo upotrebu dodatka I. Zbog toga dodatci prelaze izravno s dodatka H na dodatak J.

$r(x_i, x_j)$	procijenjeni koeficijent korelacije pridružen procjenama x_i i x_j (ulaznih veličina) koje procjenjuju ulazne veličine X_i i X_j: $r(x_i, x_j) = u(x_i, x_j)/[u(x_i)\ u(x_j)]$
$r(\overline{X}_i, \overline{X}_j)$	procijenjeni koeficijent korelacije srednjih vrijednosti $\overline{X}_i$ i $\overline{X}_j$ ulaznih veličina, određenih iz n neovisnih parova opetovanih istodobnih opažanja $X_{i,k}$ i $X_{j,k}$ veličina X_i, X_j: $r(\overline{X}_i, \overline{X}_j) = s(\overline{X}_i, \overline{X}_j)\ /\ [s(\overline{X}_i)\ s(\overline{X}_j)]$
$r(y_i, y_j)$	procijenjeni koeficijent korelacije pridružen procjenama y_i i y_j izlaznih veličina kad se dvije ili više mjerenih veličina ili izlaznih veličina određuju istim mjerenjem
s_{p}^2	sastavljena ili skupna procjena varijancije
s_{p}	združeno eksperimentalno odstupanje jednako pozitivnom drugom korijenu varijancije s_{p}^2
$s^2(\overline{q})$	eksperimentalna varijancija srednje vrijednosti q; procjena varijancije σ^2/n srednje aritmetičke vrijednosti q: $s^2(\overline{q}) = s^2(q_k)/n$; procijenjena varijancija dobivena određivanjem A-vrste
$s(\overline{q})$	eksperimentalno standardno odstupanje srednje vrijednosti $\overline{q}$, jednako je pozitivnom drugom korijentu eksperimentalne varijancije srednje vrijednosti q, $s^2(q)$; $s(q)$ je pristrani procjenjivač standardnog odstupanja srednje vrijednosti q, $\sigma(\overline{q})$ (vidi podtočku C.2.2.21, napomenu); standardna nesigurnost dobivena određivanjem A-vrste
$s^2(q_k)$	eksperimentalna varijancija određena iz n neovisnih opetovanih opažanja q_k veličine q; procjena varijancije σ^2 razdiobe vjerojatnosti veličine q
$s(q_k)$	eksperimentalno standardno odstupanje, jednako je pozitivnom drugom korijenu eksperimentalne varijancije $s(q_k)$ je pristrani procjenjivač standardnog odstupanja razdiobe vjerojatnosti veličine q
$s^2(\overline{X}_i)$	eksperimentalna varijancija srednje vrijednosti $\overline{X}_i$ ulazne veličine X_i određene iz n neovisnih opetovanih o pažanja $X_{i,k}$ veličine X_i; procijenjena varijancija dobivena određivanjem A-vrste
$s(\overline{X}_i)$	eksperimentalno standardno odstupanje srednje vrijednosti $\overline{X}_i$ ulaznih veličina X_i, jednako je pozitivnom drugom korijenu eksperimentalne varijancije $s^2(\overline{X}_i)$; standardna nesigurnost dobivena je iz izračuna A-vste
$s(\overline{q}, \overline{r})$	procjena kovarijancije srednjih vrijednosti $\overline{q}$ i $\overline{r}$ koje procjenjuju očekivanja μ_q i μ_r dviju slučajnih veličina q i r određenih iz n neovisnih parova opetovanih istodobnih opažanja q_k i r_k, procjenjena kovarijancija dobivena je određivanjem A-vrste
$s(\overline{X}_i, \overline{X}_j)$	procjena kovarijancije srednjih vrijednosti $\overline{X}_i$ i $\overline{X}_j$ ulaznih veličina X_i i X_j određenih iz n neovisnih parova opetovanih opažanja $X_{i,k}$ i $X_{j,k}$ veličina X_i i X_j; procijenjene kovarijancije dobivene su određivanjem A-vrste
$t_p(\nu)$	t-faktor i t-razdioba za ν broj stupnjeva slobode koji odgovara određenoj vjerojatnosti p
$t_p(\nu_{\mathrm{eff}})$	t-faktor i t-razdiobe za broj stupnjeva slobode ν_{eff} koji odgovara određenoj razdiobi p koja se upotrebljava za izračunavanje povećane nesigurnosti U_p
$u^2(x_i)$	procijenjena varijancija pridružena procjeni x_i ulazne veličine X_i NAPOMENA- Kad se x_i određuje iz aritmetičke sredine ili prosjeka od n neovisnih opetovanih opažanja, $u^2(x_i) = s^2(\overline{X}_i)$ je procijenjena varijancija dobivena određivanjem A-vrste.

$u(x_i)$	standardna nesigurnost procjene x_i koja procjenjuje ulaznu veličinu X_i, jednaka je pozitivnom drugom korijenu iz $u^2(x_i)$ NAPOMENA: Kad se x_i određuje iz aritmetičke sredine ili prosjeka od n neovisnih opetovanih opažanja, $u(x_i) = s(\overline{X}_i)$ jednaka je standardnoj nesigurnosti dobivenoj određivanjem A-vrste
$u(x_i, x_j)$	procijenjena kovarijancija pridružena dvjema procjenama x_i i x_j ulaznih veličina koje procjenjuju ulazne veličine X_i i X_j NAPOMENA: Kad se x_i i x_j određuju iz n neovisnih parova opetovanih istodobnih opažanja $u(x_i, x_j) = s(\overline{X}_i, \overline{X}_j)$ je procjena kovarijancije dobivene određivanjem A-vrste
$u_c^2(y)$	sastavljena varijancija pridružena procjeni y izlazne veličine
$u_c(y)$	sastavljena standardna nesigurnost procjene y izlazne veličine jednaka pozitivnom drugom korijenu iz $u_c^2(y)$
$u_{cA}(y)$	sastavljena standardna nesigurnost procjene y izlazne veličine Y određene iz standardnih nesigurnosti i procijenjenih kovarijancija dobivenih samo određivanjem A-vrste
$u_{cB}(y)$	sastavljena standardna nesigurnost procjene y izlazne veličine Y određena iz standardnih nesigurnosti i procijenjenih kovarijancija dobivenih samo određivanjem B-vrste
$u_c(y_i)$	sastavljena standardna nesigurnost procjene y_i izlazne veličine Y_i kad se dvije ili više mjerenih veličina određuju istim mjerenjem
$u_i^2(y)$	sastavnica sastavljena varijancijom $u_c^2(y)$ pridružene procjeni y izlazne veličine proizvedena varijancijom $u^2(x_i)$ pridruženoj procjeni x_i ulazne veličine X_i: $u_i^2(y) \equiv [c_i u(x_i)]^2$
$u_i(y)$	sastavnica sastavljene standardne nesigurnosti $u_c(y)$ procjene y izlazne veličine Y proizvedena standardnom nesigurnošću procjene x_i ulazne veličine X_i: $u_i(y) \equiv \|c_i\| u(x_i)$
$u(y_i, y_j)$	procijenjena kovarijancija pridružena procjenama y_i i y_j izlaznih veličina Y_i i Y_j koje se određuju istim mjerenjem
$u(x_i)/\|x_i\|$	relativna standardna nesigurnost procjene x_i ulazne veličine X_i
$u_c(y)/\|y\|$	relativna sastavljena standardna nesigurnost procjene y izlazne veličine Y
$[u(x_i)/x_i]^2$	procijenjena varijancija pridružena procjeni y ulazne veličine X_i
$[u_c(y)/y]^2$	relativna sastavljena varijancija pridružena procjeni y ulazne veličine Y
$\dfrac{u(x_i, x_j)}{\|x_i x_j\|}$	procijenjena relativna kovarijancija pridružena procjenama x_i i x_j ulaznih veličina X_i i X_j
U	povećana nesigurnost procjene y izlazne veličine Y koja određuje interval $Y = y \pm U$ koji ima visoku razinu povjerenja, jednaka je faktoru pokrivanja k puta sastavljene standardne nesigurnosti $u_c(y)$ procjene y: $U = ku_c(y)$
U_p	povećana nesigurnost procjene y izlazne veličine $Y = y \pm U_p$ koji ima visoku određenu razinu povjerenja p, jednaka je faktoru pokrivnaja k_p puta sastavljena standardna nesigurnost $u_c(y)$ procjene y: $U_p = k_p u_c(y)$

x_i	procjena ulazne veličine X_i NAPOMENA: kad se x_i određuje iz aritmetičke sredine ili prosječne vrijednosti n neovisnih opetovanih opažanja, tada je $x_i = \overline{X}_i$
X_i	i-ta ulazna veličina o kojoj ovisi mjerena veličina NAPOMENA: X_i može biti fizička veličina ili slučajna varijabla (vidi podtočku 4.1.1, napomenu 1.)
$\overline{X}_i$	procjena vrijednosti ulazne veličine X_i, jednaka je aritmetičkoj sredini ili prosječnoj vrijednosti n neovisnih opetovanih opažanja $X_{i,k}$ veličine X_i
$X_{i,k}$	k-to neovisno opetovano opažanje veličine X_i
y	procjena mjerene veličine Y; mjerni rezultat; procjena izlazne veličine
y_i	procjena mjerene veličine Y_i kad se određuju istim mjerenjem dvije ili više mjerenih veličina
Y	mjerena veličina
$\frac{\Delta u(x_i)}{u(x_i)}$	procijenjena relativna nesigurnost standardne nesigurnosti $u(x_i)$ procjene x_i ulazne veličine
μ_q	očekivanje srednje vrijednosti razdiobe vjerojatnosti slučajne veličine q
ν	broj stupnjeva slobode (općenito)
ν_i	broj stupnjeva slobode ili broj stvarnih stupnjeva slobode standardnog odstupanja $u(x_i)$ procjene x_i ulazne veličine X_i
ν_{eff}	broj stvarnih stupnjeva slobode $u_c(y)$ koji služi za dobivanje $t_p(\nu_{\text{eff}})$ za izračunavanje povećane nesigurnosti U_p
ν_{effA}	broj stupnjeva slobode sastavljene standardne nesigurnosti određen sam iz standardnih nesigurnosti dobivenih određivanjem A-vrste
ν_{effB}	broj stvarnih stupnjeva slobode sastavljene standardne nesigurnosti određen samo određivanjem B-vrste
σ^2	varijancija razdiobe vjerojatnosti (npr.) slučajne veličine q procijenjena s pomoću eksperimentalne varijancije $s^2(q_k)$
σ	standardno odstupanje razdiobe vjerojatnosti, jednako je pozitivnom drugom korijenu varijancije σ^2; $s(q_k)$ je pristrani procjenjivač standardnog odstupanja
$\sigma^2(\overline{q})$	varijancija srednje vrijednosti $\overline{q}$, jednaka je σ^2/n procijenjena s pomoću eksperimentalne varijancije $s^2(\overline{q}) = s^2(q_k)/n$
$\sigma(\overline{q})$	standardno odstupanje srednje vrijednosti $\overline{q}$, jednako je pozitivnom drugom korijenu $\sigma^2(\overline{q})$; $s(\overline{q})$ je pristrani procjenjivač standardnog odstupanja $\sigma(\overline{q})$
$\sigma^2[s(\overline{q})]$	varijancija eksperimentalnoga standardnog odstupanja $s(\overline{q})$ srednje vrijednosti $\overline{q}$
$\sigma[s(q)]$	standardno odstupanje eksperimentalnoga standardnog odstupanja $s(\overline{q})$ srednje vrijednosti $\overline{q}$, jednako je pozitivnom drugom korijenu varijancije $\sigma^2[s(\overline{q})]$

Bibliografija

[1] CIPM (1980), *BIPM Proc.-Verb. Com. Int. Poids et Mesures* **48**, C1-C30 (na francuskom); BIPM (1980), Rapport BIPM-80/3, *Report on the BIPM enquiry on error statements*, Bur. Intl. Poids et Mesures (Sèvres, Francuska) (na engleskom)

[2] KAARLS, R. (1981), *BIPM Proc.-Verb. Com. Int. Poids et Mesures* **49**, A1-A12 (na francuskom); Giacomo, P. (1981), *Metrologia* **17**, 73–74 (na engleskom)

NAPOMENA: Engleski prijevod Preporuke INC-1 (1980) koji je dan u uvodu ovih uputa (vidi podtočku 0.7) prijevod je konačne verzije preporuke, a uzet je iz internog izvještaja BIPM-a. On je sukladan s mjerodavnim francuskim tekstom preporuke danim u *BIPM Proc.-Verb. Com. Int. Poids et Mesures* **49**, a reproduciran je u dodatku A (podtočki A.l) ovih *uputa*. Engleski prijevod Preporuke INC-1 (1980) dan u časopisu *Metrologia* **17** prijevod je nacrta te se neznatno razlikuje od prijevoda danog u internom izvještaju BIPM-a te prema tomu i od onog u podtočki 0.7.

[3] CIPM (1981), *BIPM Proc.-Verb. Com. Int. Poids et Mesures* **49**, 8–9, 26 (na francuskom); Giacomo, P. (1982), *Metrologia* **18**, 43–44 (na engleskom)

[4] CIPM (1986), *BIPM Proc.-Verb. Com. Int. Poids et Mesures* **54**, 14, 35 (na francuskom); Giacomo, P. (1987), *Metrologia* **24**, 49–50 (na engleskom)

[5] ISO 5725:1986, *Precision of test methods – Determination of repeatability and reproducibility for a standard test method by inter-laboratory tests*, International Organization for Standardization (Ženeva, Švicarska)

NAPOMENA: Ta se norma trenutačno* prerađuje. Ta preradba ima novi naslov »Točnost (istinitost i preciznost) mjernih metoda i rezultata« i sastoji se od šest dijelova.

[6] *International vocabulary of basic and general terms in metrology*, second edition, 1993, ** International Organization for Standardization (Ženeva, Švicarska)

Kratica je naslova toga rječnika VIM.

NAPOMENE:

1. Definicije naziva dane u dodatku B uzete su iz engleskoga teksta VIM-a u njegovu konačnom obliku prije objavljivanja.
2. Drugo izdanje VIM-a objavila je Međunarodna organizacija za normizaciju (ISO) uime sljedećih sedam organizacija koje su sudjelovale u radu Tehničke savjetodavne skupine 4 ISO-a (TAG 4), skupine koja je podupirala razvoj VIM-a: Međunarodnog ureda za utege i mjere (BIPM-a), Međunarodnog elektrotehničkog povjerenstva (IEC-a), Međunarodnog saveza za kliničku kemiju (IFCC-a), ISO-a, Međunarodne unije za čistu i primijenjenu kemiju (IUPAC-a), Međunarodne unije za čistu i primijenjenu fiziku (IUPAP-a) i Međunarodne organizacije za zakonsko mjeriteljstvo (OIML-a).
3. Prvo izdanje VIM-a objavio je ISO 1984. godine uime BIPM-a, IEC-a, ISO-a i OIML-a.

*** Fusnota uz verziju iz 2008. godine:**

ISO 5725:1986 zamijenio je niz od šest dijelova. ISO 5725 sastoji se od sljedećih dijelova pod općim naslovom *Točnost (istinitost i preciznost) mjernih metoda i rezultata:*

Dio 1.: Opća načela i definicije
Dio 2.: Osnovna metoda za određivanje ponovljivosti i obnovljivosti normirane mjerne metode
Dio 3.: Medumjere preciznosti normirane mjerne metode
Dio 4.: Osnovne metode za određivanje istinitosti normirane mjerne metode
Dio 5.: Alternativne metode za određivanje preciznosti normirane mjerne metode
Dio 6.: Uporaba u praksi vrijednosti točnosti

**** Fusnota uz verziju iz 2008. godine:**

Treće izdanje rječnika objavljeno je 2008. godine pod naslovom JCGM 200:2008, *Međunarodni mjeriteljski rječnik – Osnovni i opći pojmovi i pridruženi nazivi (VIM).*

[7] ISO 3534-1:1993, * *Statistics – Vocabulary and symbols – Part 1: Probability and general statistical terms*, International Organization for Standardization (Ženeva, Švicarska)

[8] FULLER, W. A. (1987), *Measurement error models*, John Wiley (New York, N.Y.)

[9] ALLAN, D. W. (1987), *IEEE Trans. Instrum. Meas.* **IM-36**, 646–654

[10] DIETRICH, C. F. (1991), *Uncertainty, calibration and probability*, second edition, Adam-Hilger (Bristol)

[11] MÜLLER, J. W. (1979), *Nucl. Instrum. Meth.* **163**, 241–251

[12] MÜLLER, J. W. (1984), in *Precision measurement and fundamental constants II*, Taylor, B. N., and Phillips, W. D., eds., Natl. Bur. Stand. (U. S.) Spec. Publ. 617, US GPO (Washington, D.C.), 375–381

[13] JEFFREYS, H. (1983), *Theory of probability*, third edition, Oxford University Press (Oxford)

[14] PRESS, S. J. (1989), *Bayesian statistics: principles, models, and applications*, John Wiley (New York, N.Y.)

[15] BOX, G. E. P., HUNTER, W. G., and HUNTER, J. S. (1978), *Statistics for experimenters*, John Wiley (New York, N.Y.)

[16] WELCH, B. L. (1936), *J. R. Stat. Soc. Suppl.* **3**, 29–48; (1938), *Biometrika* **29**, 350–362; (1947), *ibid.* **34**, 28–35

[17] FAIRFIELD-SMITH, H. (1936), *J. Counc. Sci. Indust. Res. (Australija)* **9**(3), 211

[18] SATTERTHWAITE, F. E. (1941), *Psychometrika* **6**, 309–316; (1946) *Biometrics Bull.* **2**(6), 110–114

[19] ISO Guide 35:1989, ** *Certification of reference materials — General and statistical principles*, second edition, International Organization for Standardization (Ženeva, Švicarska)

[20] BARKER, T. B. (1985), *Quality by experimental design*, Marcel Dekker (New York, N. Y.)

* **Fusnota uz verziju iz 2008. godine:**

Norma ISO 3534-1:2006 poništava i zamjenjuje normu ISO 3534-1:1993. Napominjemo da su neki nazivi i definicije prerađeni. Za dodatne obavijesti vidi najnovije izdanje.

** **Fusnota uz verziju iz 2008. godine:**

ISO upute 35:2006 poništavaju i zamjenjuju ISO upute 35:1989. Za dodatne obavijesti vidi najnovije izdanje.

Abecedno kazalo

G

H

I

J

K

N

O

P

R

S

T

U

V

W

Z